This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Math 4008.77.7

SCIENCE CENTER LIBRARY

FROM THE BEQUEST OF

GEORGE HAYWARD, M.D.,

OF BOSTON,

(Class of 1809).

18 March, 1898.

10235

Ueber

den Hermite'schen Fall

der

Lamé'schen Differentialgleichung.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen Philosophischen Fakultät

der

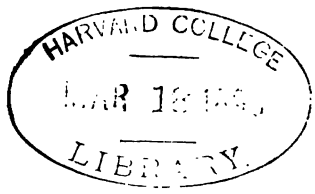
Georg-Augusts-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Mary Frances Winston
aus Chicago.

Göttingen 1897.
Druck der Dieterich'schen Universitäts-Buchdruckerei.
(W. Fr. Kaestner.)

VE 9773
Math 4008.97.7



Hayward fund

Referent: Herr Professor Dr. Klein.

Tag der mündlichen Prüfung: 31. Juli 1896.

Einleitung.

Die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \{Ap(t) + B\}\, y \qquad \text{(a)}$$

wo A den Wert $n(n+1)$ besitzt (n ist eine ganze Zahl) und B ein Parameter ist, gestattet $2n+1$ algebraische Lösungen, von denen jede einem bestimmten ausgezeichneten Werte des Parameters entspricht. Diese Thatsache ist zuerst von Lamé bei der Lösung eines in der Wärmetheorie vorkommenden Problems erkannt worden und in seinem Werke „Leçons sur les Fonctions inverses" ausführlich behandelt. Die in diesen Lösungen vorkommenden rationalen Faktoren sind wohlbekannt als „Lamé'sche Polynome."

In einer im Jahre 1874 erschienenen Abhandlung beschäftigt sich Hermite mit der Aufgabe, diese Gleichung (a) für allgemeine Werte von B zu lösen und zwar durch Verwendung der elliptischen Funktionen. Seine sehr schönen Resultate sind seit der Zeit viel erwähnt worden. So sind sie z. B. in dem II. Bande der „Elliptischen Funktionen" von Halphen in dem Kapitel über die Lamé'sche Differentialgleichung sehr ausführlich dargestellt, und die Rechnungen für die Fälle $n = 2$, $= 3$ und $= 4$ ausgeführt worden. Dies sind aber nur Formeln. Sie liefern uns für einen gegebenen Wert der unabhängigen Veränderliche einen numerischen Wert für die abhängige Veränderliche.

Um jedoch einen allgemeinen Ueberblick über ihren Inhalt zu haben, ist es wünschenswert, den Verlauf der durch diese Lösungen bestimmten reellen Curven zu zeichnen. Die vorläufigen Angaben zu diesem Probleme sind von Prof. Klein in den Vorlesungen „Ueber lineare Differentialgleichungen" vom Sommersemester 1894 gegeben, worauf wir noch zurückkommen werden.

Es ist nun das Ziel vorliegender Arbeit, dieses Problem für die Fälle $n = 1$, $n = 2$ unter verschiedenen Annahmen auszuführen und die geometrischen Verhältnisse für alle Werte von n zu erläutern. Ein erhöhtes Interesse bekommt die Sache dadurch, dass sie auch mit der Mechanik im Zusammenhange steht. Schon in der Abhandlung von Hermite ist gezeigt, dass die Bewegung des sphärischen Pendels sich durch eine Funktion darstellen lässt, welche eine Lösung eines speciellen Falles der Lamé'schen Gleichung ($n = 2$) ist. Es ist aber möglich, wie nachher gezeigt werden soll, die Bewegung des Kreisels, und deshalb auch die des sphärischen Pendels, durch eine Funktion darzustellen, die eine Lösung der Lamé'schen Gleichung für $n = 1$ ist*).

*) „Ueber die Bewegung des Kreisels", Prof. Klein. (Näheres p. 65.)

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung I

Teil I.

Vorbereitende Formeln.

§ 1. Verschiedene Formen für die Differentialgleichungen 1
Wurzelverteilung in den ausgezeichneten Lösungen 1
§ 2. Existenz und Bestimmung von $F(x, B)$, danach Ausdrücke für $C(B)$, y_1 und y_2 3
Die Curven $F(x, B) = 0$ 3
Zusammenstellung der Gleichungen für die von B abhängigen Funktionen 3
§ 3. Die elliptischen und hyperbolischen Felder der Ebene x, B 6
Aufgabenstellung 6
Ableitung von drei Gleichungen, welche die Orte der Nullstellen, Maximalstellen und Wendepunkte der Curven $y = y_1(x)$ und $y = y_2(x)$ in der Ebene x, B darstellen 7
Dasselbe für die Curven $y = y_1(t)$, $y = y_2(t)$ 9

Teil II.

Betrachtung der Lösungen y_1, y_2 und $c_1 y_1 + c_2 y_2$ als Funktionen von x.

§ 4. y_1 und y_2 als Teile derselben Curve 9
Diese Curve besteht aus unendlich vielen Zügen 11
Relationen zwischen den Ordinaten in den verschiedenen Zügen . . 12
§ 5. Die durch die allgemeine Lösung $c_1 y_1 + c_2 y_2$ der Gleichung dargestellte Curve schliesst sich der Curve $y = y_1$ asymptotisch an . . 13
Die Lösungen $y_1 + y_2$ und $\frac{y_1 - y_2}{i}$ sind auch in den elliptischen Intervallen reell 15
Verlauf dieser Curven für bestimmtes B. Die vier verschiedenen Sorten von Curven 16
§ 6. Die zeichnerische Herstellung der Curven 21

Teil III.

Betrachtung der Lösungen der Differentialgleichungen als Funktionen von t.

§ 7. Geometrischer Charakter der Beziehung zwischen den Ebenen x, y und t, y 25
Uebertragung der x, y-Curven in den vier Intervallen auf vier Cylinder 25

Seite

8. Uebertragung der Curven $y_1, y_2, c_1 y_1 + c_2 y_2$ in der Ebene x, y in die Ebene t, y mittels der vier Cylinder 27

Teil IV.

Betrachtung der Curven $u = u(t)$, $v = v(t)$ in der Ebene u, v.

§ 9. Allgemeine Eigenschaften dieser Curven 29

§ 10. Beweis zweier Sätze betreffs der Amplituden in den elliptischen Intervallen 32

§ 11. Zeichnerische Darstellung der Curven $u = u(t)$, $v = v(t)$ in der Ebene u, v. 41

Teil V.

Anwendungen in der Mechanik.

§ 12. Die Gleichung des sphärischen Pendels als specieller Fall der Hermite'schen Differentialgleichungen 43

§ 13. Vergleich der Grundebene x, β des Pendels mit der allgemeinen Grundebene x, B 45

§ 14. Erläuterung einer Stelle bei Hermite 50

§ 15. Der Fall des allgemeinen Kreisels 53

Betrachtung mittelst der stereographischen Projection 54

Vergleich der Grundebene (K) des Kreisels mit der allgemeinen Grundebene $n = 1$ 54

Uebergang zum Pendelfall 54

Teil I.

Vorbereitende Formeln.

§ 1.

Verschiedene Formen für die Differential-Gleichungen. — Wurzelverteilung in den ausgezeichneten Lösungen.

Indem wir $p(t)$ statt t als unabhängige Variable einführen, können wir die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dt^2} = (Ap(t) + B)y \tag{1}$$

in folgender Gestalt schreiben:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{\varphi'(x)}{2\varphi(x)}\frac{dy}{dx} - \frac{Ax+B}{4\varphi(x)}\cdot y = 0, \tag{2}$$

wo

$$x = p(t),$$
$$2\sqrt{\varphi(x)} = p'(t) = 2\sqrt{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

ist. Setzen wir

$$A = n(n+1),$$

wo n eine ganze Zahl ist, so hat die Gleichung (2) die singulären Punkte

$$a \quad b \quad c \quad d = \infty$$

deren Exponenten

$$\begin{cases} 0 & 0 & 0 & -\frac{n}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{n+1}{2} \end{cases}$$

sind, und zwar ist die Gleichung durch diese Angaben bis auf die Constante B bestimmt. Nehmen wir an, dass a, b und c reell sind und $a > b > c$, dann sind in üblicher Weise

$$a = p\omega_1 \qquad b = p\omega_2 \qquad c = p\omega_3,$$

wo ω_1 reell, ω_3 rein imaginär und $\omega_2 = \omega_1 + \omega_3$ ist. Geben wir n einen bestimmten Wert, so ist y durch Gleichung (1) als Funktion von t und B, durch Gleichung (2) als Funktion von x und B bestimmt. Wie wir in der Einleitung erwähnt haben, existieren für jeden Wert von n $2n+1$ besondere reelle Werte B_i von B (die wir die ausgezeichneten Werte nennen wollen), für welche die Gleichung eine Lösung besitzt, die eine algebraische Funktion von x ist und folgende Gestalt hat:

$$y = (x-a)^{\frac{\varepsilon}{2}} (x-b)^{\frac{\varepsilon'}{2}} (x-c)^{\frac{\varepsilon''}{2}} P_i(x), \tag{3}$$

wo jede der Zahlen $\varepsilon\, \varepsilon'\, \varepsilon''$ entweder Null oder 1 ist. $P(x)$ soll ein Polynom sein. Die Wurzeln dieses Polynoms sind reell und liegen in den Intervallen $\widehat{ab}$ und $\widehat{bc}$.

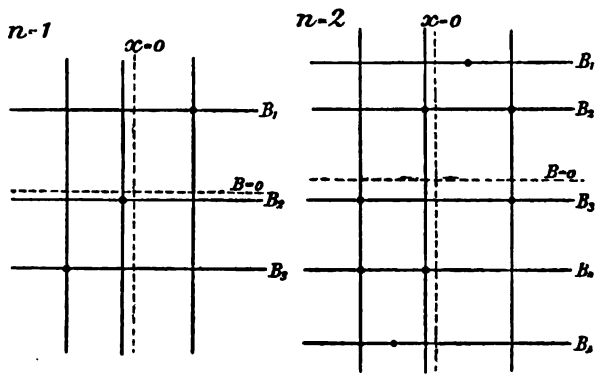


Fig. (α). Fig. (β).

Die schematischen Figuren (α) und (β) stellen die Ebene $y = 0$ dar und zeigen die Verteilung der Wurzeln von y_i für die 3 ausgezeichneten B_i, wenn $n = 1$, und für die 5 B_i, wenn $n = 2$ ist. Diese zwei Schemata bilden die Grundlage unserer folgenden Darstellung [1]).

---

1) Ableitung dieser Schemata für diese und höhere Werte von n, sowie für die Entstehung und den Gebrauch der elliptischen und hyperbolischen Felder der Grundebene siehe: Klein, „Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen, 1894, Seite 340 ff.

§ 2.

Existenz und Bestimmung von $F(x, B)$. Ausdrücke für $C(B)$, y_1 und y_2. — Die Curven $F(x, B) = 0$. — Zusammenstellung der Gleichungen für die von B abhängigen Funktionen.

Indem wir jetzt zu beliebigen Werten von B übergehen, können wir den Hauptsatz der Hermite'schen Theorie folgendermaßen aussprechen:

Für jeden Wert des variablen Parameters B der Lamé'schen Differentialgleichung lassen sich 2 besondere Lösungen y_1 und y_2 der Gleichung von der Art finden, dass ihr Produkt eine rationale Funktion $F(x)$ vom Grade n ist. Nur für diejenigen Werte B_i, welche den Lamé'schen Polynomen entsprechen, fallen die Lösungen y_1 und y_2 zusammen und wir können daher schreiben:

$$y_i = \sqrt{F(x, B_i)}.$$

Diese Funktion $F(x, B)$ ist eine Lösung einer gewissen linearen Differentialgleichung 3ter Ordnung, die man leicht aus der Gleichung (1) bestimmen kann. Setzen wir

$$F(x, B) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots\cdots + a_n$$

in diese Gleichung ein, so lassen sich die Coefficienten a durch eine recurrente Gleichung als Funktionen von B bestimmen. Die Constante C in der Gleichung

$$y_1 \frac{dy_2}{dt} - y_2 \frac{dy_1}{dt} = C$$

lässt sich mittels F bestimmen. Es ist nämlich

$$C^2 = 4\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 \varphi - 8F\varphi\frac{d^2F}{dx^2} - 4F\varphi'\frac{dF}{dx} + 4(Ax + B)F^2, \quad (4a)$$

wo F, φ, φ' zur Abkürzung für $F(x)$, $\varphi(x)$ und $\varphi'(x)$ geschrieben sind, und zugleich ist:

$$C^2 = K(B - B_1)(B - B_2)\cdots\cdots\cdots(B - B_{2n+1}), \quad (4b)$$

wo K eine von B unabhängige Constante ist. Hierdurch lassen sich die ausgezeichneten Werte von B: $B_1, B_2 \cdots\cdots\cdots B_{2n+1}$ numerisch berechnen. Die beiden Funktionen $C(B)$ und $F(x, B)$ ge-

nügen vollständig, um die Fundamentallösungen y_1 und y_2 analytisch darzustellen, und zwar sind:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{F(x)}\cdot e^{\int \frac{C}{4F\sqrt{\varphi}}\cdot dx}, \\ y_2 &= \sqrt{F(x)}\cdot e^{-\int \frac{C}{4F\sqrt{\varphi}}\cdot dx}, \\ y_1 &= \sqrt{F(pt)}\cdot e^{\int \frac{C}{2F}\cdot dt}, \\ y_2 &= \sqrt{F(pt)}\cdot e^{-\int \frac{C}{2F}\cdot dt}. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Fassen wir $F(x, B) = 0$ als eine Curve in der Ebene x, B auf, so giebt sie die Nullstellen der Curven $y = y_1$ und $y = y_2$ für gegebenes B an. Die Schemata (α) und (β) geben die Durchschnittspuncte dieser Curven mit den ausgezeichneten Linien B_i an. Wenn die Lagen dieser Linien bekannt sind, geben diese Schemata Punkte genug, um die allgemeine Gestalt der Curven zu bestimmen. Es zeigt sich, dass dies auch für höhere Werte von n der Fall ist. Die Figuren*) (γ) und (δ) zeigen die Curven $F_1(x, B) = 0$ und $F_2(x, B) = 0$. Wir können aber die Lösungen y_1 und y_2 noch in einer anderen Gestalt schreiben, nämlich:

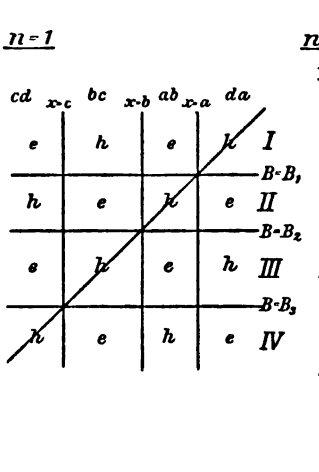


Fig. (γ).

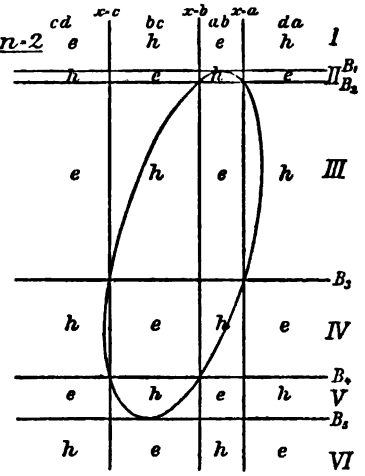


Fig. (δ).

*) Klein: Vorlesungen; einen anderen Beweis für die Verteilung der Wurzeln giebt Markoff in den Mathemat. Annalen, Band 47.

$$y_1 = \frac{\sigma(t-t_1)\cdot\sigma(t-t_2)\cdot\cdots\cdots\sigma(t-t_n)}{\sigma^n t\cdot\sigma t_1\cdot\sigma t_2\cdot\cdots\cdots\cdots\sigma t_n} e^{t(\zeta t_1+\zeta t_2\cdots\cdots\zeta t_n)}$$

$$y_2 = \frac{\sigma(t+t_1)\cdot\sigma(t+t_2)\cdot\cdots\cdots\sigma(t+t_n)}{\sigma^n t\cdot\sigma t_1\cdot\sigma t_2\cdot\cdots\cdots\sigma t_n} e^{-t(\zeta t_1+\zeta t_2+\cdots\cdots\zeta t_n)} \qquad (6)$$

wenn wir

$$F(x) = (pt-pt_1)(pt-pt_2)\cdots\cdots(pt-pt_n) \qquad (7$$

setzen.

Halphen macht zum Ziele seiner Untersuchung, y_1 und y_2 als Funktionen von x, B und dem sogenannten élément simple $\frac{\sigma(t+\nu)}{\sigma t\sigma\nu} e^{(\xi-\zeta\nu)t}$ auszudrücken, wo

$$\nu = t_1+t_2+t_3+\cdots\cdots+t_n$$
$$\zeta\nu = \xi+\zeta t_1+\zeta t_2+\cdots\cdots\cdots+\zeta t_n$$

ist. Die Formeln (5) werden uns gewöhnlich zur Darstellung der Funktionen y_1 und y_2 genügen. Da die von Halphen gefundenen Ausdrücke von $p\nu$, $p'\nu$, ξ und C (für $n = 2$) als Funktionen von B uns später nützlich sein werden, stellen wir sie hier mit den anderen Formeln für $n = 1$ und $n = 2$ zusammen.

$n = 1$

$$F_1(x, B) = x-B, \qquad B = pt_1,$$
$$C = p't_1, \qquad B_1 = a, \qquad B_2 = b, \qquad B_3 = c \qquad (8)$$

$n = 2$, $(B = 6\beta)$

$$F_2(x, \beta) = (x-\beta)^3+3\left(\beta^2-\frac{\mathfrak{G}_2}{12}\right)$$
$$= (pt-pt_1)(pt-pt_2),$$
$$C^2 = -16\varphi'(\beta)(\varphi(\beta)-3\beta\varphi'(\beta)),$$
$$\beta_1 = \sqrt{\frac{\mathfrak{G}_2}{12}}, \quad \beta_2 = -\frac{c}{2}, \quad \beta_3 = -\frac{b}{2}, \quad \beta_4 = -\frac{a}{2},$$
$$\beta_5 = -\sqrt{\frac{\mathfrak{G}_2}{12}}, \qquad (9)$$
$$t_1+t_2 = \nu \qquad \zeta t_1+\zeta t_2 = \zeta\nu-\xi,$$
$$p\nu = \frac{\beta\varphi'(\beta)-\varphi(\beta)}{\varphi'(\beta)},$$
$$\xi = \sqrt{\frac{3\beta\varphi'(\beta)-\varphi(\beta)}{\varphi'(\beta)}},$$
$$p'\nu = \frac{3\varphi(\beta)}{\varphi'(\beta)}\cdot\xi.$$

§ 3.

Die elliptischen und hyperbolischen Felder der Ebene x, B. — Aufgabenstellung. — Ableitung von drei Gleichungen, welche die Orte der Nullstellen, Maximalstellen und Wendepunkte der Curven $y = y_1(x)$ und $y = y_2(x)$ in der Ebene x, B darstellen. — Dasselbe für die Curven $y = y_1(t)$, $y = y_2(t)$.

Durch die 2 Scharen von parallelen Geraden $x = a, b, c,$ und $B = B_1, B_2, \ldots$ haben wir die Ebene x, B in eine schachbrettartige Figur geteilt. Die von der ersten Schar von Geraden eingeschlossenen Streifen bezeichnen wir mit $\widehat{da}$, $\widehat{ab}$, $\widehat{bc}$, $\widehat{cd}$, und die von der zweiten Schar eingeschlossenen Streifen mit den römischen Ziffern I, II, ... (wie in den Figuren γ und δ gezeigt ist); somit haben wir eine Bezeichnung für jedes Feld der x, B Ebene. In der Hälfte dieser Felder sind die Funktionen y_1 und y_2 reell. (Da diese Funktionen nur bis auf einen constanten Factor bestimmt sind, brauchen wir die Möglichkeit, dass sie rein imaginaer werden, nicht in Betracht zu ziehen.) In der anderen Hälfte sind sie complex, wie wir nachher sehen werden. Die Felder, in denen y_1 und y_2 recll sind, nennen wir die hyperbolischen Felder und diejenigen, in denen sie complex sind, die elliptischen Felder. In den Figuren (γ) und (δ) sind die hyperbolischen Figuren mit einem h, die elliptischen mit einem e versehen.

Es soll nun unsere Aufgabe sein, den Verlauf der Lösungen der Differentialgleichungen im Reellen für die beiden einfachen Fälle $n = 1$ und $n = 2$ zu zeichnen. Diese Lösungen können wir dabei in verschiedener Weise in Betracht ziehen.

In Teil II dieser Arbeit sehen wir x als unabhängige Variable an und zeichnen die Curven

$$y = y_1(x),$$
$$y = y_2(x),$$
$$y = y_1(x) + cy_2(x),$$

soweit sie reell sind.

In Teil III haben wir die unabhängige Variable t eingeführt und betrachten entsprechend,

$$y = y_1(t),$$
$$y = y_2(t),$$
$$y = y_1(t) + cy_2(t).$$

In Teil IV können wir y_1 und y_2 nach Belieben als Funktionen von x oder t betrachten, wo

$$y_1 = u + iv,$$
$$y_2 = u - iv$$

ist, und zeichnen in der $(u.v)$ Ebene dann die Curven:

$$\left.\begin{aligned} u &= u(t) \\ v &= v(t) \end{aligned}\right\} \text{ oder } \left.\begin{aligned} u &= u(x) \\ v &= v(x) \end{aligned}\right\}.$$

Diese Auffassung bezieht sich nur auf die elliptischen Intervalle, während wir uns in den Teilen II und III mit Curven beschäftigen, welche nur in den hyperbolischen oder höchstens in hyperbolischen und elliptischen Intervallen liegen.

Teil V schliesst sich unmittelbar an Teil IV an und behandelt die Anwendung der in Teil IV gewonnenen Resultate auf die Mechanik, nämlich auf die Probleme des Kreisels. —

Ehe wir zum Teile II übergehen, leiten wir noch einige Ausdrücke ab, welche uns nachher nützlich sein werden. Die Curve $F(x, B) = y_1 y_2 = 0$ in der Ebene x, B giebt für einen bestimmten Wert B_m von B die Nullstellen der beiden Funktionen y_1 und y_2. Durch die Curve

$$\frac{dy_1}{dx} \cdot \frac{dy_2}{dx} = 0$$

erhalten wir in derselben Weise die Maximal- beziehungsweise Minimalstellen dieser Funktion, und durch

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} \cdot \frac{d^2y_2}{dx^2} = 0$$

die Wendepunkte der Curven y_1 und y_2. Diese Ausdrücke lassen sich aber sehr leicht analytisch darstellen.

In der Gleichung $F(x) = y_1 y_2$ differenzieren wir zweimal nach x und ersetzen

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} \quad \text{und} \quad \frac{d^2y_2}{dx^2}$$

durch ihre Werte aus den Gleichungen (2), ferner $y_1 y_2$ durch $F(x, B)$, so bekommen wir:

$$4\varphi(x)\frac{dy_1}{dx} \cdot \frac{dy_2}{dx} = 2\varphi(x)\frac{d^2F}{dx^2} + \varphi'(x)\frac{dF}{dx} - (Ax + B)F.$$

Zur Abkürzung setzen wir:

$$\chi(x, B) = 2\varphi(x)\frac{d^2F}{dx^2} + \psi'(x)\frac{dF}{dx} - (Ax + B)F; \qquad (10)$$

dann ist:

$$\frac{dy_1}{dx} \cdot \frac{dy_2}{dx} = \frac{\chi(x, B)}{4\varphi(x)}.$$

Ferner erhalten wir aus Gleichung (2):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\tfrac{1}{2}\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{Ax + B}{4\varphi(x)} \cdot y,$$

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} \cdot \frac{d^2y_2}{dx^2} = \frac{((Ax + B)y_1 - 2\varphi' y_1')((Ax + B)y_2 - 2\varphi' y_2')}{16\varphi^2(x)}$$

$$= \frac{(Ax + B)^2 F\varphi - 2\varphi'(Ax + B)\frac{dF}{dx}\varphi + \varphi'^2\chi}{16\varphi^2(x)}.$$

Wieder zur Abkürzung setzen wir:

$$\psi(x, B) = (Ax + B)^2 F\varphi - 2\varphi'(Ax + B)\frac{dF}{dx}\varphi + \varphi'\chi,$$

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} \cdot \frac{d^2y_2}{dx^2} = \frac{\psi(x, B)}{16\varphi^3(x)}$$

Die Curve $\chi = 0$ ist offenbar vom Grade $n + 1$. $\psi = 0$ ist im allgemeinen von der Ordnung $n + 5$, nur wenn $n = 2$ oder $n = 0$ ist, fallen die höchsten Glieder von ψ_{n+5} weg, und die Curve ist vom Grade $n + 3 = 5$ bezw. 3. Es ist nämlich der Coefficient von x^{n+5} in $\psi(x)$:

$$n^2(n + 1)^2 - 6n^2(n + 1) + 9(3n^2 - 4n) = n^4 - 4n^3 + 22n^2 - 36n$$

$$= n(n - 2)(n^2 - 2n + 18)$$

und der Coefficient von x^{n+4} fehlt immer.
Die Punkte der Curven

$$\chi = 0$$

$$\psi = 0$$

sind die Nullpunkte von $y_1' y_2'$ resp. $y_1'' y_2''$, wenn wir diejenigen Punkte ausschliessen, in denen zu gleicher Zeit $\varphi(x) = 0$ ist. In den Figuren (1) und (2) sind diese Curven für $n = 1$, resp. $n = 2$ gezeichnet (vergl. die beigegebenen Tafeln).

Das Zeichnen von $\chi = 0$ und $\psi = 0$ ist erleichtert, da wir wissen, dass für alle Werte von n beide Curven durch alle Schnitte von $C = 0$ und $\varphi = 0$ hindurchgehen, ausser denen, wo $F = 0$ ist, wie wir einsehen, wenn wir die Gleichungen (7) und (10)a in der Gestalt schreiben:

$$C^2 = 4\left(\frac{dF}{dx}\right)^2 \cdot \varphi(x) - 4F(x) \cdot \chi(x), \qquad (11)$$

$$\psi_{n+5} = \left[(Ax+B)F(x) - 2\varphi'(x)\frac{dF}{dx}\right](Ax+B)\varphi(x) + \varphi'^2\chi_{n+1}.$$

Die entsprechenden Curven in der Ebene t, B lassen sich noch einfacher ausdrücken, ihre Gleichungen sind aber transcendent. Sie lauten für:

$$n = 1$$

$$\left.\begin{aligned} F(t,B) &= pt - B, \\ \chi(t,B) &= p''(t)_2 - 2(2pt-B)F(p(t)), \\ \psi(t,B) &= (2pt+B)(pt-B), \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

$$n = 2$$

$$\left.\begin{aligned} F(t,\beta) &= (pt-\beta)^2 - 3\left(\beta^2 - \frac{G_2}{12}\right), \\ \chi(t,B) &= 2p'^2(t) + 2\left(pt - \frac{B}{6}\right)p''(t) - 2(6pt+B)F(p(t)), \\ \psi(t,B) &= (6pt+B)^2 F(p(t)). \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Teil II.

Betrachtung der Lösung y_1, y_2 und $c_1 y_1 + c_2 y_2$ als Funktionen von x.

§ 4.

y_1 und y_2 als Teile derselben Curve. — Diese Curve besteht aus unendlich vielen Zügen. — Relationen zwischen den Ordinaten in den verschiedenen Zügen.

Betrachten wir die Gleichungen (5):

$$y_1 = \sqrt{F(x)} \cdot e^{\int \frac{C}{4F\sqrt{\varphi(x)}}\, dx},$$

$$y_2 = \sqrt{F(x)} \cdot e^{-\int \frac{C}{4F\sqrt{\varphi(x)}}\,dx},$$

(wo wir uns aber noch vorbehalten einen Factor $\pm i$ in $\sqrt{F(x)}$ einzuführen, wenn es erforderlich ist um $\sqrt{F(x)}$ reell zu machen). Wenn x reell ist, so ist das Integral $\int \frac{C}{4F} \cdot \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}}$ nur dann reell, wenn $\sqrt{\varphi(x)}$ und die Funktion $\frac{C}{4F(x)}$ beide reell oder beide imaginaer im ganzen Intervalle sind. $\sqrt{\varphi(x)}$ ist reell in $\widehat{da}$ und $\widehat{bc}$. $F(x)$ ist in der ganzen Ebene reell, C in den Streifen I, III etc. Demzufolge sind, wie wir schon sagten, y_1 und y_2 in der einen Hälfte der Felder, nämlich in den elliptischen Feldern, complex. Es ist jetzt nur noch erforderlich, damit das Integral in den hyperbolischen Intervallen reell wird, dass wir den Integrationsweg auf ein Intervall beschränken. Wir nehmen infolgedessen $x = b$ als untere Grenze unseres Integrals für die beiden mittleren Intervalle, $x = \infty$ für die beiden äusseren an und integrieren über die reelle Axe bis x. Es ist also:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{F(x)} \cdot e^{\int_b^x \frac{C}{4F(x)\sqrt{\varphi(x)}}\,dx}, \\ y_2 &= \sqrt{F(x)} \cdot e^{-\int_b^x \frac{C}{4F(x)\sqrt{\varphi(x)}}\,dx}, \end{aligned}\right\} \text{ in den mittleren Intervallen} \qquad (15)a$$

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{F(x)} \cdot e^{\int_\infty^x \frac{C}{2F(x)\sqrt{\varphi(x)}}\,dx}, \\ y_1 &= \sqrt{F(x)} \cdot e^{-\int_\infty^x \frac{C}{2F(x)\sqrt{\varphi(x)}}\,dx}. \end{aligned}\right\} \text{ in den äusseren Intervallen.} \qquad (15)b$$

Wenn wir aber die untere Grenze a oder c brauchen wollen, bezeichnen wir die betreffenden Lösungen y_1 und y_2 mit y_{1a} y_{2a} resp. y_{1c}, y_{2c}.

Wollen wir jetzt die Curve $y = y_1(x)$ für einen bestimmten Wert von B in einem hyperbolischen Intervalle $\widehat{ba}$ zeichnen, so sehen wir zunächst, dass y_1 keine eindeutige Funktion von x ist und dass wir daher zuerst das Vorzeichen der Quadratwurzel $\sqrt{\varphi(x)}$ bestimmen müssen. Sehen wir x zunächst als eine complexe Variable an, dann können wir $H(x) = \frac{C}{4F(x)\sqrt{\varphi(x)}}$ in der x-Ebene eindeutig bestimmen, indem wir uns diese Ebene doppelt

überdeckt und in den Punkten $x = a$, b und c zusammenhängend vorstellen. Wir können die Schnitte in der x-Ebene so ziehen, dass die reelle Axe die in Figur (ε) dargestellte Form hat. Den-

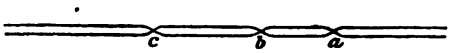


Fig. (ε).

ken wir uns, dass diese Doppellinie als x-Axe in der Ebene x, y liegt, so haben wir wieder eine zweimal überdeckte Ebene, deren Blätter in den Linien $x = a$, $x = b$ und $x = c$ zusammenhängen. In $x = b$ haben wir $y_1 = \sqrt{F(b)}$. Lassen wir die obere Grenze x dieses Integrales im oberen Blatte von b in der Richtung nach a wachsen, und tragen wir die entsprechenden Werte von y_1 als Ordinate einer Curve auf, so kommen wir auf diese Weise an den Punkt $x = a$. Da wir nun nicht über diese Grenze gehen können, so bleibt uns weiter nichts übrig, als x in das untere Blatt gehen zu lassen. Die Curve $y = y_1$ berührt nun die Linie $x = a$ und geht in das untere Blatt hinein. Die Curve in Fig. (ζ) ist ein besonderer Fall dieser Curve, welcher den Uebergang vom einen zum anderen Blatte sehr gut zeigt. Die festen Linien sollen in dem oberen, die punktirten in dem unteren liegen. Indem wir jetzt x von a nach b zurücklaufen lassen, beschreiben wir einen II. Zug dieser Curve und, wenn x wieder bei $x = b$ in das obere Blatt hineintritt, beginnen wir einen III. Zug. Betrachten wir $y = y_1(x)$ als die Gleichung der vollständigen Curve und bezeichnen mit (y_1) die Ordinate, welche einem Punkt x auf dem ersten Wege *boa* entspricht, mit $(y_1)_1$ die, welche einem x in dem darauffolgenden Wege *aub* u. s. w. und endlich mit $(y_1)_m$ die, welche einem x auf dem m^{ten} Wege *ba* entspricht. In derselben Weise lassen wir x von (y_1) bei $x = b$ in das untere Blatt laufen, und bezeichnen einen im I. Zuge liegenden Wert von y mit $(y_1)_{-1}$, einen im II. mit $(y_1)_{-2}$ · · · · · und im m-Zuge mit $(y_1)_{-m}$. Die mit einem geraden Index versehenen Züge liegen in dem oberen, die mit einem ungeraden Index in dem unteren Blatte. Fangen wir nun in einem Punkte in dem Zuge $y = (y_1)_2$ an, und folgen wir der Curve über das Intervall in der Richtung *boa* in das andere Blatt hinein und von da an nach dem Anfangswerte von x, so unterscheidet sich

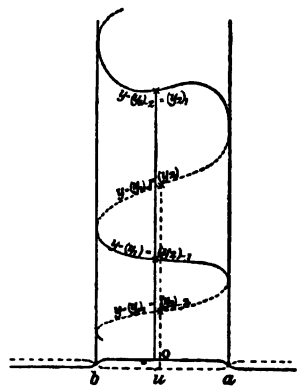


Fig. (ζ).

der so erhaltene Ausdruck $(y_1)_{k+2}$ von $(y_1)_k$ nur durch den Faktor

$$e^{\int_{(boaub)} H(x)\,dx} = e^{2\int_{boa} H(x)\,dx}.$$

Setzen wir

$$e^{\int_b^a H(x)\,dx} = R_{ba}, \tag{16}$$

so ist

$$(y_1)_{k+2} = R_{ba}^2 (y_1)_k.$$

Bei dem Uebergange in das untere Blatt wird das Vorzeichen von $\sqrt{\varphi(x)}$ gewechselt. Aus der Gleichung (15)a sehen wir jedoch, dass y_1 durch einen solchen Wechsel in y_2 übergeht. Beginnen wir dann die Curve $y = y_2$ in dem unteren Blatte, so fällt ihr erster Zug $y = (y_2)$ mit $y = (y_1)_{-1}$ zusammen, und ebenso fallen auch alle anderen Züge mit Zügen der Curve $y = y_1$ zusammen, so dass wir beide Lösungen in der einen Curve dargestellt haben. Die im oberen Blatte liegenden Züge der Curve sind also Multipla von (y_1), die im unteren sind solche von (y_2). Beim Zeichnen der Curven wollen wir erstere als Züge y_1 bezeichnen, letztere als Züge y_2, und die beiden Blätter nicht weiter unterscheiden. Diese Betrachtung gilt in derselben Weise für die anderen Intervalle. Die 4 Faktoren R_{da} R_{ab} R_{bc} und R_{cd} sind Funktionen von B, von denen die beiden den elliptischen Intervallen entsprechenden für jeden Wert von B complex sind. In den jetzt betrachteten, hyperbolischen Intervallen kann R nur für die ausgezeichneten Werte von B gleich 1 werden. —

Die verschiedenen Züge der Curve $y = y_1(x)$ ziehen sich, während B dem Werte B_i näher kommt, immer mehr zusammen, und in der Grenze liegen sie auf einer einzigen algebraischen Curve.

Für $n = 1$ sind diese Curven alle Parabeln, z. B. wenn $B = B_1 = a$ ist, so ist die Gleichung der Curve

$$y = k\sqrt{x - a}.$$

Wir geben den Konstanten k den Wert 1 für die Teile der Ebene, in denen $x > a$ ist, den Wert i für solche, in denen $x < a$ ist. Figur 3 (Tafel) zeigt diese Curve. Die entsprechenden Curven für $B = B_2 = b$ und $B = B_3 = c$ erhalten wir indem wir die beiden Parabeln, aus denen sie besteht, durch eine Strecke $a - b$ resp. $a - c$ verschoben denken.

Für $n = 2$ sind 2 von den 5 Curven der ausgezeichneten Fälle Gerade, die anderen 3 haben eine Gleichung von der Gestalt:

$$y = k\sqrt{\left(x - \frac{c}{2}\right)^3 + 3\left(\left(\frac{c}{2}\right)^3 + \frac{g_2}{12}\right)}$$

in der wir, wie oben, k den Wert 1 oder i geben, je nachdem der eine oder der andere Wert die rechte Seite reell macht. Im ersten Falle ist die Curve eine Hyperbel, im zweiten ein Kreis. Figuren 3 bis 5 (Tafel) stellen Beispiele dieser Curven dar. —

Die theoretisch einfachste und übersichtlichste Weise eine geometrische Vorstellung der jetzt betrachteten Lösungen zu geben, wäre die, die Fläche $y = y_1(x, B)$ im Raume x, y, B zu untersuchen, aber die unendlich vielen Falten der Fläche laufen in so complicierter Weise durch einander, dass eine eingehende Beschreibung ihres Verhaltens sehr schwierig ist. Trotzdem werden wir manchmal diese Vorstellung zu Hülfe nehmen.

§ 5.

Die durch die allgemeine Lösung $c_1 y_1 + c_2 y_2$ der Gleichung dargestellte Curve schliesst sich der Curve $y = y_1$ asymptotisch an. — Die Lösungen $y_1 + y_2$ und $\frac{y_1 - y_2}{i}$ sind auch in den elliptischen Intervallen reell. — Verlauf dieser Curven für bestimmtes B. — Die vier verschiedenen Arten von Curven.

Wenn wir anstatt der speciellen Lösungen y_1 und y_2 beliebige lineare Funktionen derselben gebrauchen, so entstehen wieder ähnliche Curven. $c_1 y_1 + c_2 y_2$ ändert sich nach Berührung der Grenzcurven $x = b$, d. h. nach dem Eintreten des x in das untere Blatt, in

$$c_1 y_2 + c_2 y_1$$

um. Bei der Berührung mit der anderen Grenze geht dieser Ausdruck wieder über in

$$c_1 R^2 y_1 + c_2 R^{-2} y_2$$

um wieder für $x = b$ in

$$c_1 R^2 y_2 + c_2 R^{-2} y_1$$

überzugehen u. s. f., bis in dem $2n^{\text{ten}}$ Zuge der Curve

$$y = c_1 R^{+2n} y_2 + c_2 R^{-2n} y_1$$

ist, und im $(2n+1)^{\text{ten}}$ Zuge

$$y' = c_1 R^{+2n} y_1 + c_2 R^{-2n} y_2$$

wird.

Denken wir uns y_1 und y_2 so gewählt, dass $R > 1$ ist, so überwiegt das erste Glied sehr bald das andere und die allgemeine Curve nähert sich mehr und mehr einem Multiplum der ursprünglichen Curve $y = c_1 y_1$. — Folgen wir der Curve in der anderen Richtung, so kommen wir von

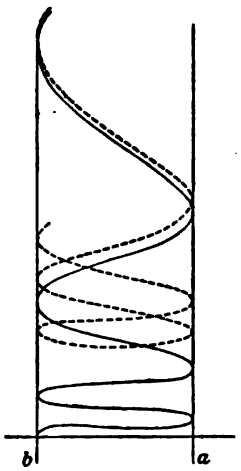


Fig. (η).

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

nach

$$y = c_1 R^{-2} y_2 + c_2 R^2 y_1$$

und endlich nach

$$y = c_1 R^{-2n} y_2 + c_2 R^{2n} y_1.$$

Die Curve nähert sich immer mehr

$$y = c_2 y_2.$$

In der nebenstehenden Figur (η) haben wir $y = \frac{y_1 + 2y_2}{2}$ mit punktirter Linie gezeichnet. Wir sehen wie die Curve zuerst abnehmende dann immer wachsende Coordinaten besitzt und dass der eine Zug sehr bald der Curve $y = y_1$, der andere der Curve $y = \frac{1}{2} y_1$ folgt. Weil die allgemeinen Lösungen $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ sich im Unendlichen an die Lösungen $y = c_1 y_1$ und $y = c_2 y_2$ anschliessen, so werden letztere die asymptotischen Lösungen genannt.

Ist jedoch $c_1 = c_2$, so gestalten sich die Verhältnisse anders. Es ist dann (indem wir der Einfachheit halber $c_1 = 1$ setzen):

$$y = y_1 + y_2 = \sqrt{F(x)} \left\{ e^{\int_b^x H(x)\,dx} + e^{-\int_b^x H(x)\,dx} \right\},$$

$$\frac{y_1'}{y_1} = \frac{1}{2F\sqrt{\varphi}}(-C + F'\sqrt{\varphi}), \quad y_1' = \frac{1}{2y_2\sqrt{\varphi}}(-C + F'\sqrt{\varphi}),$$

$$\frac{y_2'}{y_2} = \frac{1}{2F\sqrt{\varphi}}(C + F'\sqrt{\varphi}), \quad y_2' = \frac{1}{2y_1\sqrt{\varphi}}(+C + F'\sqrt{\varphi}),$$

$$y' = y_1' + y_2' = \frac{F'}{2F}(y_1 + y_2) - \frac{C}{2F\sqrt{\varphi}}(y_1 - y_2).$$

Im allgemeinen wird für $\varphi = 0$, d. h. für einen Punkt auf

der Grenze zwischen einem hyperbolischen und einem elliptischen Intervalle dieser Ausdruck $= \infty$ werden.

Wenn aber $y_1 = y_2$ ist, wird der zweite Term rechter Hand $= \frac{0}{0}$, und ein Grenzübergang zeigt, dass hier y' einen bestimmten endlichen Wert hat. Die Curve $y = y_1 + y_2$ läuft also über die Grenze in das elliptische Intervall hinaus, wie wir in den Figuren (6) bis (15) sehen[1]). Auf der anderen Grenze des hyperbolischen Intervalles kann y_1 nicht $= y_2$ sein, also läuft die Curve nach dieser Seite in unendlich vielen Windungen hin und her und nähert sich immer mehr der asymptotischen Curve $y = y_1$, ebenso wie sich der eine Zug in dem allgemeinen eben besprochenen Falle

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

der Curve $y = c_1 y_1$ näherte.

Wir haben hier also eine Curve, welche gleichzeitig in den elliptischen und den hyperbolischen Intervallen reell ist. Der Verlauf der Curve im elliptischen Intervalle lässt sich sehr leicht übersehen.

Setzen wir

$$y_1 = u + iv,$$

$$y_2 = u - iv,$$

so ist

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = u,$$

und ferner

$$y = u = \sqrt{F(x)} \cdot \cos\left\{\tfrac{1}{2}\int_b^x \frac{C}{4F(x)\sqrt{\varphi(x)}}\,dx\right\}$$

$$= \sqrt{F(x)} \cdot \cos U,$$

wenn

$$iU = \int_b^x \frac{C}{4F(x)\sqrt{\varphi(x)}} \cdot dx$$

ist.

Die Curve liegt immer innerhalb einer Hülfscurve $y = \sqrt{F(x)}$. Da $F(x)$ in den elliptischen Intervallen keine Nullstellen hat, sind die Nullstellen von u nur die Punkte, wo

$$iU = \int_b^x H(x)\,dx = \frac{2n+1}{2} \cdot \pi$$

ist. Die Curve berührt die obere Grenzcurve, wo

$$\int_b^x H(x)\,dx = 2n\pi$$

1) In allen diesen Figuren ist $y = y_1 + y_2$ oder $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ durch eine stark punktirte Linie angedeutet.

ist, die untere wo

$$\int_b^a H(x)\,dx = (2n+1)\pi$$

ist. Sei $\widehat{ba}$ das betreffende Intervall, so ist:

$$iU_{ab} = \int_b^a H(x)\,dx = \int_{\omega_2}^{\omega_1} \frac{C}{F'(x)}\,dt = \int_{\omega_2}^{\omega_1} \frac{C}{(pt-pt_1)(pt-pt_2)(\cdot\,\cdot)}\,dt$$

u. s. f.

Ob ein Nullpunkt oder eine Berührung der oberen oder unteren Grenzcurve in dem ersten Zuge vorkommt, hängt von dem Werte dieses U_{ab} ab.

Wenn $U_{ab} < \frac{\pi}{2}$ ist, so läuft die Curve nach ihrem Eintritt in das Intervall nach der gegenüberliegenden Grenze hinüber, berührt diese, läuft wieder zurück und dann hin und her, bis U den Wert $\frac{\pi}{2}$ erreicht, wo sie die Axe $y = 0$ überschreitet, schwankt wieder zwischen den beiden Linien $x = b$, $x = a$ hin und her, bis sie in $U = \pi$ die untere Grenzlinie berührt und den Rückweg antritt. — Wenn dagegen $U_{ab} > \frac{\pi}{2}$ ist, so überschreitet die Curve die x-Axe, ehe sie die Linie $x = a$ berührt. Für $U_{ab} > \pi$ kreuzt die Curve die x-Axe und berührt die untere Grenze in ihrem I. Zuge. Ist U_{ab} aber noch grösser, so schwankt sie erst zwischen den oberen und unteren Grenzen auf und ab. Wenn $U_{ab} = \frac{m}{n} \cdot \pi$ ist (wo m und n ganze Zahlen sind), so hat dieser Process ein Ende. Dies kann jedoch in zweierlei Weise geschehen:

1) Wenn $U_{ab} = \frac{2n+1}{2m} \cdot \pi$ ist, so ist $\cos 2m\, U_{ab} = -1$, d. h. nach $2m$-Zügen muss die Curve dem analytischen Aussehen nach zu gleicher Zeit eine der verticalen Geraden und eine der Grenzcurven berühren. Ein Grenzübergang zeigt, dass sie keine von beiden berührt, sondern durch die Ecke mit einem bestimmten Winkel über die verticale Gerade hinaus und in das nächste Intervall hineinläuft. Da die Zahl der Züge eine gerade Zahl war, so geht die Curve wieder in das Intervall, aus dem sie kam, und man sieht sogleich, dass diese Curve das Spiegelbild von der ursprünglichen Curve ist, d. h. ihr eigenes Spiegelbild. —

2) Wenn $U_{ab} = \frac{2n+1}{2m+1} \cdot \pi$ ist, so ist $\cos(2m+1)\, U_{ab} = -1$. Die Curve läuft über die andere gerade Linie hinaus und in ein

neues Intervall hinein. Wenn, wie wir angenommen haben, das erste Intervall eines der mittleren war, sind wir jetzt in einem der äusseren Intervalle $\widehat{ad}$. Hier ist $y_1 = y_2 = \sqrt{F(a)}$. Diejenigen Lösungen im Intervalle $\widehat{da}$, welche diesen Wert in $x = a$ haben, sind y_{1a} und y_{2a} und wir können y daher für den neuen Bereich in der Gestalt schreiben: $y = \frac{y_{1a} + y_{2a}}{2}$. Wenn sich x nun k-mal in diesem Intervalle hin und her bewegt und dessen Grenze nähert, so werden y_{1a} und y_{2a} die Form haben: $R^k_{\widehat{da}}\sqrt{F(a)}$ und $R^{-k}_{\widehat{da}}\sqrt{F(a)}$, welche nicht gleich sein können. Da wir nun gesehen haben, dass, damit $y' = y_1 + y_2$ endlich bleibt, wenn sich x einer der Grenzen c oder b nähert, y_1 und y_2 in dem betreffenden Punkt einander gleich sein müssen, so sehen wir ferner, dass unsere Curve nicht wieder aus dem Intervalle herauskommen kann und sich bald der Curve $y = y_{1a}$ asymptotisch anschliesst.

Der Fall $U_{ab} = \frac{2n}{2m+1} \cdot \pi$ unterscheidet sich nur dadurch von diesem, dass

$$\cos(2m+1)\, U_{ab} = +1$$

ist, d. h. die Curve kommt durch die obere Ecke hinaus, während sie im vorigen Falle durch die untere Ecke herauskam.

Wenn wir nun die Fläche $y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = u(x, B)$ betrachten, sehen wir, dass sie viererlei Schnittcurven für die Ebene $B =$ Constans besitzt.

1) $B = B_1, B_2 \cdots$ oder B_{2m+1}. Hier ist der Schnitt eine algebraische Curve, und y für gegebenes B in allen Intervallen eindeutig bestimmt, wenn wir das Vorziehen von $\sqrt{F(x)}$ festgesetzt haben.

2) $U_{ab} = \frac{2n+1}{2m} \cdot \pi$. y hat nun im elliptischen Intervalle eine endliche Anzahl von Werten zu gegebenem x, ist aber im hyperbolischen Intervalle unendlich vieldeutig.

3) $U_{ab} = \frac{2n+1}{2m+1}\pi$ oder $= \frac{2n}{2m+1} \cdot \pi$. y ist hier wieder eine unendlich vieldeutige Funktion von x im hyperbolischen Intervalle, und hat im elliptischen Intervalle zu gegebenem x eine endliche Anzahl von Werten. Dieser Fall unterscheidet sich von dem letzten Falle dadurch, dass seine Curve in drei Intervallen existiert.

4) $y = \mu\pi$ (μ sei eine irrationale Zahl). Die Curve windet

sich im elliptischen Intervalle herum. Neue Züge kommen unendlich nahe an die alten heran, fallen aber nie vollständig mit diesen zusammen.

Diese vier Sorten von Curven können sogar in unendlich kleiner Entfernung von einander eintreten. Schneiden wir unsere Flächen mit einer Ebene x = Constans = R^1, welche durch das dritte, von den Curven der Gattung 3 erfüllte hyperbolische Intervall hindurchgeht, (Figur 8), so werden die Curven der

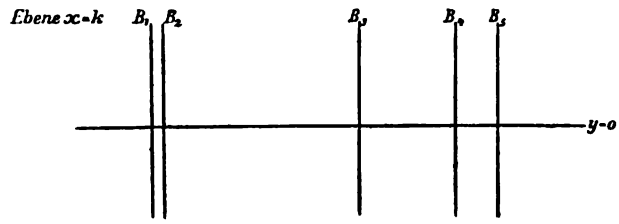


Fig. (8).

Gattung 1, 2 und 4 überhaupt nicht auftreten. Da aber U_{ab} eine continuirliche Funktion von B ist, so sind zwischen zwei noch so nahe aneinander liegenden Werten von B, Werte von U_{ab}, welche die Gestalt $\frac{2n+1}{2m+1} \cdot \pi$ haben, vorhanden. Der Schnitt der erwähnten Ebene mit unserer Fläche wird in dem Sinne continuirlich sein, dass für jede noch so kleine Zahl δ zwischen einem beliebigen $B = B_\beta$ und $B = B_\beta + \delta$ unendlich viele Werte von y liegen, d. h. unendlich viele Punkte der Curve. In demselben Intervalle von B_β bis $B_\beta + \delta$ liegen aber noch unendlich viele Werte von B, denen kein Wert von y entspricht. Die Curve, scheinbar continuirlich, wird doch in jeder noch so kleinen Strecke durch unendlich viele Geraden durchsetzt, welche mit ihr keinen Punkt gemeinsam haben.

Wir haben aber eben gesehen, dass die Curven der Gattung (3) sich auch in der Form $y = \frac{y_{1a} + y_{2a}}{2}$ darstellen lassen. Die Punkte der eben beschriebenen Curve liegen also auf der Fläche

$$2y = y_{1a}(x, B) + y_{2a}(x, B)$$

und müssen daher der Curve

$$2y = y_{1a}(h, B) + y_{2a}(h, B)$$

angehören. Wir sehen also, dass der betrachtete Schnitt der Fläche $2y = y_{1b}(x, B) + y_{2b}(x, B)$ aus gewissen unendlich nahe

aneinander gelegenen Punkten der gewöhnlichen Curve

$$2y = y_{1a}(h, B) + y_{2a}(h, B)$$

besteht.

Die Curven der Gattung 1 sind identisch mit den entsprechenden Lamé'schen Curven $y = y_1 = \sqrt{F(x, B_i)}$, welche für $n = 1$ und $n = 2$ in den Figuren (3) bis (5) gezeichnet sind (vergl. die beigegebenen Tafeln). Die stark punktirten Curven in den Figuren (6) bis (15) haben die Gleichungen $y = y_1 + y_2$ oder $\frac{y_1 + y_2}{2}$, je nachdem die eine oder die andere der Grösse der Figuren entspricht. Im ersterem Falle, wie z. B. in Fig. 19, sehen wir, wie die punktirten Curven sich den festen Curven in ihren späteren Zügen nähern.

Die andere im elliptischen Intervalle reelle Curve

$$y = \frac{c(y_1 - y_2)}{2i} = c\sqrt{F(x)} \cdot \sin \cdot U$$

ist immer symmetrisch in Bezug auf $y = 0$, da

$$(y_1)_{-1} - (y_2)_{+1} = -\{(y_2) - (y_1)\}$$

ist. Hier können wir die Curven in fünf Gattungen teilen, da die Curven der Gattung (2) sich in 2 Gattungen spalten:

$$(1)' \qquad B = B_1, B_2 \cdots\cdots \text{ oder } B_{2n+1}.$$

Hier haben die Curven alle die Gleichungen $y = 0$.

$$(2)' \qquad U_{ab} = \frac{2h+1}{2m} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\sin 2m\, U_{ab} = \sin(h + \tfrac{1}{2})\pi = \pm 1.$$

Nach einer geraden Anzahl von Ueberschreitungen des Intervalls erreicht y den Wert ± 1 und geht über in das hyperbolische Intervall $\widehat{bc}$. Für den $(2m+1)^{ten}$ Zug der gesammten Curve ist

$$y = \frac{(y_1)_{2m} - (y_2)_{2m}}{2i},$$

$$y = \frac{e^{2m\, U_{ab}i}(y_1) - e^{-2m\, U_{ab}i}(y_2)}{2i} = \pm \frac{(y_1) + (y_2)}{2}.$$

Es ist also in diesem Falle die Curve $y = \frac{y_1 - y_2}{2i}$ die analytische

Fortsetzung der Curve $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ im elliptischen Intervalle, d. h. diese Curven sind in ihrer Gesammtheit identisch.

$$(2)'' \qquad U_{ab} = \frac{2n+1}{2m+1} \cdot \frac{\pi}{2}$$

Hier erlangt y nach $2m+1$ Schwankungen über das Intervall den Wert ± 1, überschreitet die andere Grenze und kommt in $\widehat{ad}$ hinein. Hier setzt sich unsere Curve $y = \frac{y_{1b} - y_{2b}}{2i}$ in $y = \frac{y_{1c} + y_{2c}}{2i}$ analytisch fort, wie wir durch eine Ueberlegung zeigen können, welche der vorhergehenden ähnlich ist.

$$(3)' \qquad U_{ab} = \frac{2h+1}{2m+1} \cdot \pi \text{ oder } \frac{2h}{2m+1} \cdot \pi.$$

In diesem Falle bekommt y nach einer ungeraden Anzahl von Zügen den Wert 0 für $x = a$ und da die Curve symmetrisch ist, muss sie sich hier schliessen.

$$(4)' \qquad U_{ab} = \mu\pi,$$

wo μ eine irrationale Zahl ist. Wie in dem entsprechenden Falle für $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ bleibt die Curve immer in ihrem ersten elliptischen Intervalle und schliesst sich nie.

Betrachten wir diese Curven als Schnittcurven einer Fläche im Raume x, y, B, so können wir sagen: Die Fläche

$$y = \frac{y_1(x, B) - y_2(x, B)}{2}$$

ist symmetrisch in Bezug auf die Axe $y = 0$ und teilt mit der Fläche

$$y = \frac{y_1(x, B) + y_2(x, B)}{2}$$

die Eigenschaft, mit unendlich nahe aneinanderliegenden Ebenen $B =$ Constans Schnittcurven zu haben, welche in ein zweites Intervall übergehen. Da diese beiden Flächen mit allen Ebenen $B = B_k$, welche einem Werte von U_{ab} von der Gestalt $\frac{2h+1}{2m} \cdot \frac{\pi}{2}$ ent-

sprechen, dieselbe Schnittcurve haben, schneiden sie sich in unendlich vielen unendlich nahe aneinander liegenden Curven.

§ 6.

Die zeichnerische Herstellung der Curven

$$y = y_1(x),$$

$$y = \frac{y_1(x) + y_2(x)}{2} \text{ und } y = \frac{y_1(x) - y_2(x)}{2i}.$$

Die Curve $y = y_1(x)$ liegt, wie wir schon gesagt haben, nur in den hyperbolischen Intervallen und besteht aus einer unendlichen Anzahl von Windungen, in dem sie die beiden Grenzlinien ihres Intervalles, etwa $x = b$ und $x = a$ abwechselnd berührt. Von den verschiedenen zwischen diesen Berührungspunkten liegenden Zügen zeigen zwei, welche wir mit (y_1) und (y_2) oder $(y_1)_{-1}$ bezeichnet haben, bereits die wesentlichen Eigenschaften der Curve und jeder andere Zug lässt sich aus einem dieser Züge durch Multiplication mit einem constanten Faktor ableiten.

Die Figuren (1) und (2)[1]) geben uns für gegebenes B die Lage der Nullstellen, Maximal- oder Minimalstellen und Wendepunkte der Curven. Es ist nur noch nötig, festzustellen, welchem der beiden Züge der Curve die einzelnen Punkte angehören. Das können wir mit Leichtigkeit, wenn wir zuerst solche Curven betrachten, welche sehr nahe den ausgezeichneten Curven liegen. Z. B. für die Curve in dem unteren Teile des Feldes I, $\overset{\frown}{bc}$, Fig. (1) wissen wir von vornherein, dass $y = (y_1)$ und $y = (y_2)$ zusammen keine Nullstellen, zwei Maximal- bezw. Minimalstellen und zwei Wendepunkte haben. Es zeigt sich aber sogleich, dass beide Minimalstellen und ein Wendepunkt dem einen Zuge angehören müssen, und wenn wir dann versuchen, die Curve für $B = B_1 + \delta B$ zu zeichnen, stellt sie sich uns notwendigerweise in der Gestalt der punktierten Linie in der Figur (1) dar. Es ist also der untere Zug $y = (y_2)$, welcher die beiden Maximalstellen, hat und gleichfalls entspricht diesem Zuge der Zweig der Curve $\phi = 0$, (Fig. 1) welcher in $x = c$ anfängt und $x = b$ zur Asymptote hat. —

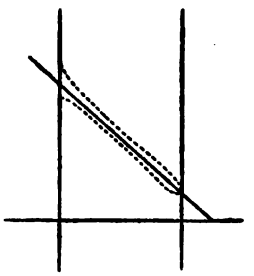


Fig. (1).

1) Diese Zahlen beziehen sich auf die beigefügten Tafeln.

Die blauen und schwarzen Curven in den Figuren (6) bis (15) auf den beigegebenen Tafeln stellen die Curve $y = y_1$ für einen in jeder Abteilung der Ebene x, B liegenden Wert von B für $n = 1$ und $n = 2$ dar. Indem wir y_1 das positive oder negative Zeichen geben, bekommen wir 2 verschiedene Curven, von denen die eine das Spiegelbild der anderen ist. In den Figuren ist das Vorzeichen von y_1 in den inneren Intervallen dadurch bestimmt, dass $\sqrt{F(b)}$ immer positiv genommen wird, in den äusseren so, dass $y = y_1$ für sehr grosse Werte von x positiv wird.

Die leicht punktirte Curve ist die Hülfscurve $y = \sqrt{F(x)}$. $y = (y_1)$ wird auf der einen Seite dieser Curve liegen, $y = (y_2)$ auf der anderen, bis der andere Faktor $e^{\int \frac{C}{4F(x)\sqrt{\varphi(x)}}dx}$ gleich eins wird, und es gehen dann beide zugleich über die Hülfscurve, wie z. B. in Figur (7), $\widehat{ab}$ oder (8), $\widehat{bc}$. In der letzteren Curve kreuzen $y = (y_1)_1$ und $y = (y_1)_{-2}$ zuerst verschiedene Zweige der Hülfscurve und nachher denselben Zweig.

Wo keine Nullstellen von $F(x)$ vorhanden sind, muss die Funktion $\frac{C}{4F(x)\sqrt{\varphi(x)}}$ im ganzen Intervalle dasselbe Vorzeichen haben. Das Integral $\int \frac{C}{4F\sqrt{\varphi}}dx$ muss also einen von Null verschiedenen Wert besitzen. Infolgedessen können (y_1), (y_2), $(y_1)_{+1}$ ..... für keinen Wert von x einander gleich werden und die verschiedenen Züge der Curve laufen einfach hin und her, ohne einander zu kreuzen. Für $\cdots n = 1 \cdots$ ist dies z. B. in einem der beiden hyperbolischen Intervalle in jedem Streifen der Fall, und die eine Curve liegt über der x-Axe und ihr Spiegelbild unterhalb. Wo eine Nullstelle im Intervalle liegt, wie in den vier anderen in Betracht kommenden hyperbolischen Intervallen, und die Curve abwechselnd die obere Grenze rechts, die untere links, die untere rechts und die obere links berührt, liegen ihre Windungen weiter auseinander, und die des Spiegelbildes schalten sich dazwischen.

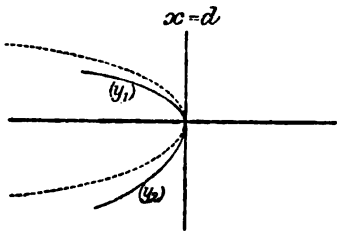


Fig. (x).

Um das Verhalten dieser Curven im Unendlichen zu untersuchen, denken wir uns die Gerade $x = d$ im Endlichen gezeichnet. (y_1) und (y_2) berühren die Hülfscurve, wie in Figur (x) dargestellt wird.

Nun lassen wir $x = d$ in's Unendliche hinausrücken, dann berührt (y_1) den oberen, (y_2) den unteren Zweig der Parabel. Die Curve $y = y_1$ wechselt also ihr Vorzeichen beim Durchgang durch's Unendliche und (y_1) hat den oberen Zweig der Parabel zur Asymptote, (y_2) den unteren.

Bei der Untersuchung der Curven

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \sqrt{F(x)} \cdot \cos U, \qquad (p)$$

und

$$y = \frac{y_1 - y_2}{2i} = \sqrt{F(x)} \cdot \sin U, \qquad (q)$$

haben wir stillschweigend angenommen, dass y_1 und y_2 in der Nähe von $U = 0$ gleiche Vorzeichen haben. Hier haben wir also in den äusseren elliptischen Intervallen, wenn wir $(y_1) + (y_2)$ gebrauchen, die Form (q), wo die Lösung sich wie ein sinus verhält. In den äusseren hyperbolischen Intervallen ist dies eine Curve von der einmal erwähnten Gestalt

$$y = y_1 - y_2, \qquad (r)$$

eine Curve, die symmetrisch ist um $y = 0$ und sich der Hauptcurve $y = y_1$ bald anschliesst und nie aus ihrem Intervalle herauskommt. Die Figuren (λ) und (μ) zeigen die Gestalt dieser Curven (p) (q) und (r) bei $x = d$ [1]).

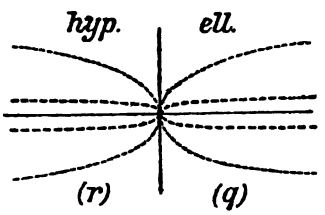


Fig. (λ).

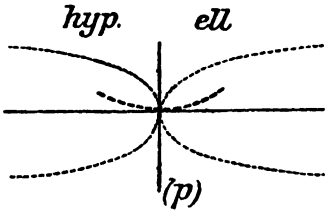


Fig. (μ).

Die stark punktirten Curven in allen unseren Figuren stellen die Curven $y = (y_1) + (y_2)$ dar.

In Figur (6) haben wir die elliptischen Amplituden [2]) $U_{ab} = \frac{7}{6}\pi$ und $U_{da} = \frac{2}{3}\pi$ angenommen. In $\widehat{ab}$ haben wir eine Curve (p) der Gattung 2. Die entsprechende Curve (q) ist eine der

1) Dass dies die richtigen Formen sind, sieht man, wenn man die nach Potenzen von $\frac{1}{x}$ fortschreitenden Reihenentwicklungen betrachtet.

2) Vergl. p. 32 ff.

Gattung 2′ und wird daher in das Intervall $\widehat{da}$ übergehen, ist also mit der hier gezeichneten nicht identisch. In $\widehat{dc}$ haben wir eine Curve (q), welche der Gattung 3′ angehört und sich schliesst, ohne aus dem einen Intervall herauszukommen. Die Curve $y = (y_1) + (y_2)$ in $\widehat{ad}$ bleibt, wie wir eben gezeigt haben, in diesem Intervalle. Bei $x = \infty$ schliesst sich der erste Zug 1 ihrem Spiegelbild an. Der Zug 2 geht im Unendlichen in einen Zug 3 über, welcher sich auf der positiven Seite der x-Axe befindet, ist aber ganz ausserhalb der Grenzen unserer Zeichnung.

Im Streifen II (Fig. 7) sind $\widehat{dc}$ und $\widehat{ab}$ hyperbolische Intervalle; in $\widehat{dc}$ ist keine Nullstelle vorhanden, $(y_1) + (y_2)$ wechselt aber bei $x = \infty$ das Vorzeichen und die eine Hälfte ihrer Züge liegt oberhalb der x-Axe, die andere unterhalb. Die punktirte Curve

$$y = \frac{(y_1) + (y_2)}{2}$$

hat eine ähnliche Gestalt. In $\widehat{bc}$ haben wir $U_{bc} = \frac{\pi}{4}$ angenommen. Die entsprechende Curve (q) ist eine der Gattung 2′ und also identisch mit (p). In $\widehat{ad}$ ist $U_{ad} = \frac{\pi}{4}$ und die entsprechende Curve (q) ist jedenfalls mit (p) identisch.

Der im Streifen III (Fig. 8) für das Intervall $\widehat{ab}$ angenommene Wert der Amplitude $U_{ab} = \frac{\pi}{5}$ giebt Curven der Gattungen 3 und 3′, welche von einander verschieden sind. Um beide Curven zusammen zeichnen zu können, haben wir für die mittleren Intervalle $c = 1$ angenommen, d. h. die Curven

$$y = y_1 + y_2 \qquad (p)$$

und

$$y = \frac{y_1 - y_2}{2i} \qquad (q)$$

gezeichnet. Erstere liegt in den 3 Intervallen, $\widehat{cb}$, $\widehat{ba}$, $\widehat{ad}$, letztere nur in $\widehat{bc}$. U_{dc} ist gleich $\frac{3}{10} \cdot \pi$. Die Curve tritt über die Grenze $x = c$ in das Intervall $\widehat{cb}$ ein und schliesst sich der Curve

$$y = y_{1c} + y_{2c}$$

an. Zur grösseren Klarheit der Zeichnung haben wir nur die eine Hälfte der Curve gezeichnet. Die andere, welche dieser Hälfte symmetrisch ist, schliesst sich dem Zuge 1 im Unendlichen an. —

In Figur (9) haben wir wieder ein Beispiel einer Curve von der Gattung 3, welche sich in 3 Intervallen befindet. Die Figuren (10) bis (15) für $n = 2$ unterscheiden sich nicht wesentlich von jenen. In den hyperbolischen Intervallen sind dieselben Formen vorhanden, allein in Fig. (11), $\widehat{ab}$ und (15), $\widehat{bc}$ kommen 2 Nullstellen vor, die Curven berühren den einen Rand immer in der positiven Halbebene, den anderen in der negativen Halbebene. Das Verhalten im Unendlichen ist bei $n = 2$ einfacher als bei $n = 1$, da eine Hyperbel die unendlich ferne Gerade einfach schneidet. Um uns die Gestalt im Unendlichen vorzustellen, ist es nur nötig, eine ähnliche Curve in einem der inneren Intervalle zu betrachten, und eine der Grenzlinien, etwa $x = b$ in's Unendliche hinausgerückt zu denken. Wir sehen sodann, dass y_1 beim Durchgang durch's Unendliche sein Vorzeichen nicht ändert. Der eine Zug folgt der Hyperbel auf der einen Seite in's Unendliche, der nächste kommt mit ihr auf der anderen Seite zurück. Die stark punktirten Curven sind, wie wir schon bemerkt haben, solche von der Art (p); in der Figur (15) ist dieselbe mit der entsprechenden (q) identisch. In Fig. (14) ist die Curve (q) in $\widehat{ab}$ auch angedeutet. Sie läuft über die Grenze $x = a$ in das Intervall $\widehat{da}$.

Teil III.

Betrachtung der Lösungen der Differentialgleichung als Funktionen von t.

§ 7.

Geometrischer Charakter der Beziehung zwischen den Ebenen x, y und t, y.

Uebertragung der x, y-Curven in den vier Intervallen auf vier Cylinder.

Gehen wir jetzt dazu über, die Lösungen unserer Gleichung als Funktionen von t statt von x zu betrachten, so müssen wir zuerst die Abbildung der reellen x-Axe in der complexen t-Ebene betrachten. Die einfache Axe $x = p(t)$ entspricht bekanntlich

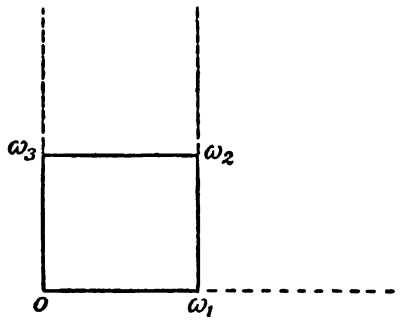


Fig. (v).

dem Rande des Rechtecks 0, ω_1, ω_2, ω_3. Wir haben uns nun jedes Intervall dieser Axe zweimal überdeckt gedacht, indem wir auf der einen Linie $\sqrt{\varphi(x)}$ ein positives, auf der anderen ein negatives Vorzeichen zugewiesen haben. Es ist aber $\sqrt{\varphi(x)} = \frac{1}{2}p't$, eine Funktion, welche ihr Vorzeichen wechselt, sobald t durch einen Punkt $t = a_1\omega_1 + a_2\omega_2$ hindurchgeht (wo a_1 und a_2 beliebige ganze Zahlen sind). Lassen wir x dann von $-\infty$ bis a laufen, so läuft t von Null bis ω_1, und während x bei a in's untere Blatt hineingeht, läuft t weiter in die zweite Hälfte seiner Periode $\widehat{\omega_1, 2\omega_1}$, die sie vollendet, wenn x wieder unendlich gross wird. Läuft x wieder in's obere Blatt und nach a zurück, so überschreitet t den Punkt $2\omega_1$ und läuft weiter nach $3\omega_1$. Solange x auf diesem geschlossenen Wege vom Unendlichen über a hin- und herläuft, so bleibt t auf der reellen Axe der t-Ebene und der m-maligen Wiederholung dieses Weges entspricht der Umstand, dass t durch m Vollperioden $2\omega_1$ läuft. In derselben Weise entspricht ein geschlossener Weg von je einem der singulären Punkte über einen ihm benachbarten Punkt einem Fortschreiten des t über eine Periode in einer der vier Linien, die durch Seiten des Vierecks 0, ω_1, ω_2, ω_3 hindurchgehen.

Denken wir uns nun nicht nur die x-Axe, sondern die Ebene x, y doppelt überdeckt und betrachten einen zwischen zwei Geraden, etwa $x = a$ und $x = b$ liegenden Teil dieser Ebene. (Figur (o)).

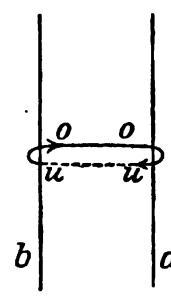


Fig. (o).

Wir können diese beiden Blätter als eine geschlossene Membran ansehen, deren beide Hälften flach auf einander liegen, und in den Geraden $x = a$ und $x = b$ zusammenhängen. Wenn diese Membran etwa mit Luft gefüllt wird, so dehnt sie sich aus und nimmt die Form eines Cylinders an, um den sich unsere Curven dann herum winden.

Entsprechend der ganzen x-Ebene haben wir vier solche Cylinder, von denen zwei den hyperbolischen, zwei den elliptischen Intervallen entsprechen. Wenn in einem hyperbolischen Intervalle keine Nullstelle von x vorliegt, so ist die Curve auf dem Cylinder einer Schraubenlinie

ähnlich, nur gehen ihre Windungen in der einen Richtung immer weiter auseinander, in der anderen ziehen sie sich immer näher zusammen. Ist aber eine Nullstelle von $F(x)$ vorhanden, so kehrt die Curve nach einem vollendeten Umlauf um den Cylinder in denselben Punkt zurück, durch den sie dann weiterhin immer wieder durchläuft, und bei 2 Nullstellen befinden sich zwei solche Punkte auf demselben Horizontalschnitt des Cylinders.

Wir fanden, dass $y = (y_2)$ einen Teil der Gesammtcurve $y = y_1$ bildete, wenn wir (y_1) in dem einen (y_2), in dem anderen Blatte zeichneten. Fangen wir $y = y_2$ in demselben Blatte mit $y = y_1$ an, so entstehen Curven, welche miteinander identisch wären, wenn sie sich nicht in verschiedenen Blättern befänden. Wenn nun diese Blätter auseinandergezogen werden, wie wir eben beschrieben haben, so bekommen wir zwei einander gegenüberliegende Curven auf dem Cylinder, die sich in dem Anfangspunkte $y = \sqrt{F(b)}$ auf der Linie $x = b$ kreuzen. Die Curve $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ geht ebenfalls durch diesen Punkt und zerlegt sich auf dem Cylinder ebenfalls in zwei Zweige. Dieselben erscheinen in dem flachen Bilde des Cylinders als eine einzige Curve, die über die betreffende Grenze in das nächste elliptische Intervall übergeht. Die hierin liegenden Curven lassen sich auf ähnliche Weise durch Curven auf einem anderen Cylinder ersetzen und es entspricht das Uebertreten einer Curve in ein anderes Intervall der Fortsetzung einer Curve auf dem einen Cylinder in eine Curve, welche auf der entgegengesetzten Seite des anderen Cylinders verläuft.

§ 8.

Uebertragung der Curven y_1, y_2, $c_1 y_1 + c_2 y_2$ von der Ebene x, y in die Ebene t, y mittelst der vier Cylinder.

Somit haben wir ein einfaches Mittel, unsere in § 6 konstruirten Figuren in die Ebene y, t zu übertragen, denn es ist offenbar nur nötig, den Cylinder des betreffenden Intervalles in geeigneter Weise auf die Ebene y, t „abzurollen“. Damit alle auftretenden Grössen reell sind, müssen wir, wie schon für die Ebene x, y gezeigt ist, den Anfangspunkt für die Integration der Funktion

$$y = \sqrt{F(x)}\, e^{\int^{t} \frac{C}{2F(x)}\, dt}$$

in dem betreffenden Intervalle nehmen. Entsprechend unserer früheren Verabredung können wir $t = 0$ für die äusseren Intervalle, und $t = \omega_2$ für die inneren als Grenzen annehmen. Für die Intervalle $\widehat{ab}$ und $\widehat{cd}$, welche imaginaeren Werten von t entsprechen, müssen wir noch die Substitution $t' = ti$ anwenden, wenn wir die Coordinaten in der t, y-Ebene reell haben wollen. Das Abrollen der Cylinder x, y erfolgt, wie eben angedeutet, durch eine kleine Verschiebung der Abscissen gemäss der Relation $x = p(t)$. Dies bewirkt natürlich eine kleine Veränderung in den Lagen der Nullstellen, Maximalstellen und Wendepunkte. Die Gleichungen (12) und (13) in Teil I geben die neuen Grundfiguren F, X und Ψ. Wir müssen aber jetzt vier Grundebenen haben, eine für jedes Intervall. Fig. (16) zeigt diese Ebene für das Intervall $\widehat{ab}$. Für die anderen Intervalle werden sie nicht wesentlich anders sein.

Die Curven $F = 0$, $X = 0$, $\Psi = 0$ in den Grundebenen sowohl wie die Hülfscurven $y = \sqrt{F(x)}$ in den Ebenen $B =$ Constans sind periodische Curven.

Die Curven $y = y_1$ und $y = y_2$ welche den hyperbolischen Intervallen entsprechen, ziehen sich immer weiter und weiter von der Hülfscurve fort, ausgenommen wo sie in den Nullstellen von $F(x)$ immer wieder zu diesen Punkten zurückkommen. Die Figuren (17) bis (22) zeigen typische Formen dieser Curven für das Intervall $\widehat{ab}$. Die den elliptischen Intervallen entsprechenden Curven liegen, wie in der Ebene x, y, immer zwischen den beiden Teilen der Hülfscurve und schwingen von der einen dieser Grenzcurven zur anderen hin und her.

Die Curve $y = \frac{y_1 + y_2}{2i}$ Fig. (17) in $\widehat{ab}$ fängt damit an, dass sie bei $t = \omega_2$ die Hülfscurve berührt, denn beide sind in dem doppelten Streifen $\widehat{ab}$ in der Ebene x, y (Fig. π) in dem einen Blatte mit ihrem in dem andern Blatte liegendem Teile identisch, sind also beide in der Ebene t', y, welche der Seite $\omega_1 \omega_2$ des Rechtecks $0\,\omega_1\,\omega_2\,\omega_3$ entspricht, hinsichtlich der Geraden $t = \omega_2$ symmetrisch und müssen daher auf dieser Linie senkrecht stehen. Der analytische Beweis hierfür lässt sich auch sehr leicht führen. Gerade so entspricht das Hinüberschreiten dieser Curve aus dem Intervalle in der x, B-Ebene in ein anderes einer Berührung der Hülfscurve auf einer der Geraden $t = \omega_2$ oder $t = \omega_1$, und die Gesammtcurve ist dann hinsichtlich dieser Geraden symmetrisch. Die verschiedenen Gattungen, in denen wir die Curven x, y in den elliptischen Inter-

vallen geteilt haben, sind also hier nur von der Bedeutung, dass der Streifen zwischen zwei solchen Symmetrielinien eine gerade oder ungerade Anzahl von Streifen von der Breite $\frac{2\omega_2}{i}$ enthält, und dass zwei oder vier solcher Streifen durchschnitten sind, ehe die Curve anfängt, sich zu wiederholen.

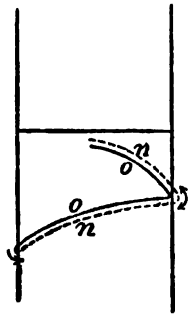


Fig. (π).

Nach alledem sehen wir, dass die Curven in der Ebene t, y darin einfacher sind, als die entsprechenden in der Ebene x, y, dass y eine eindeutige Funktion von t ist. Sie haben dagegen den Nachteil, dass eine vollständige, directe Behandlung derselben vier Grundebenen t, B und überhaupt vier Figuren t, y für jede unserer Figuren x, y verlangen würde. Da wir überdies die Curven im Falle x, y in den elliptischen und hyperbolischen Intervallen neben einander sehen und daher mit einander vergleichen können und ferner die Hülfscurven x, B alle rationale Curven sind, während sie in der Ebene t, B transcendent sind, haben wir uns entschlossen, die Curven x, y anstatt t, y an die Spitze unserer Betrachtung zu stellen.

Teil IV.

Betrachtung der Curven $u = u(t)$, $v = v(t)$ in der Ebene u, v.

§ 9.

Allgemeine Eigenschaften dieser Curven.

In den früheren Teilen folgten wir dem Verhalten der Lösungen y_1 und y_2 nur in den hyperbolischen Intervallen, oder haben höchstens in den elliptischen Intervallen die reellen und imaginären Teile getrennt als Funktionen von x oder t betrachtet. Wir können aber in den genannten Intervallen ein Bild der Funktion y_1 selbst bekommen, wenn wir die Curven zeichnen, welche die complexe Variable y_1 in ihrer Ebene beschreibt, während x ein Intervall in der schon beschriebenen Weise durchläuft, oder t sich auf einer Linie $t = \omega + \alpha\omega'$ bewegt, wo ω und ω' Halbperio-

den sind und α eine reelle Variable ist. Schreiben wir $y_1 = u + iv$, so können wir diese Curve durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} u &= u(t) \\ v &= v(t) \end{aligned}\right\} \text{ oder } \left.\begin{aligned} u &= u(x) \\ v &= v(x) \end{aligned}\right\}$$

darstellen.

Schreiben wir u und v in der Gestalt:

$$\left.\begin{aligned} u &= \sqrt{F(x)}\cos U, \\ v &= \sqrt{F(x)}\sin U, \\ \text{wo } iU &= \int_a^x \frac{C}{4F(x)\sqrt{\varphi(x)}}dx \end{aligned}\right\} (\alpha),$$

so sind $\rho = \sqrt{F(x)}$ und $\theta = U$ die Polarcoordinaten der Curve.

Nun möge θ' der Winkel sein, den die Tangente der Curve in einem beliebigen Punkte derselben mit der Axe $\theta = 0$ bildet.

Durch Differentiation der Gleichungen (1) bekommen wir dann:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{dv}{du} = \frac{2F'(x)\sqrt{\varphi(x)}\sin U + C\cos U}{2F'(x)\sqrt{\varphi(x)}\cos U + C\sin U}.$$

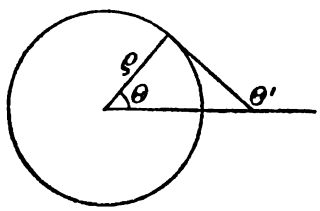


Fig. (ρ).

Wenn $\varphi(x)$ oder $F'(x) = 0$ ist, so wird

$$\operatorname{tg}\theta' = -\cos\theta,$$

$$\theta' = \frac{\pi}{2} + \theta.$$

Die Tangente der Curve ist dann in diesen Punkten senkrecht zum Radius-Vector der Curve. Danach haben wir den Satz: **Die einem gegebenen elliptischen Intervalle der Fundamentalebene der Hermite'schen Gleichung entsprechenden Curven:**

$$u = u(x) = \frac{y_1(x) + y_2(x)}{2}$$

$$v = v(x) = \frac{y_2(x) - y_3(x)}{2i},$$

berühren der Reihe nach eine Schaar von höchstens $(n+1)$ und mindestens zwei Kreisen, deren Radien $\rho = \sqrt{F(x)}$ durch die beiden Grenzwerte des Intervalles und durch diejenigen reellen Wurzeln der

Gleichung $F'(x) = 0$ bestimmt sind, welche innerhalb des Intervalles liegen.

Die Wurzeln der Gleichung $F'(x) = 0$ entsprechen den Maximal- bezw. Minimalpunkten der früher benutzten Hülfscurve $y = \sqrt{F(x)}$. Betrachten wir jetzt das Intervall $\widehat{ba}$, so mögen $\rho_1 = \sqrt{F(b)}$, $\rho_2 = \sqrt{F(a)}$ und $\bar{\rho}_1$, $\bar{\rho}_2 \cdots\cdots$ die Radien der anderen im Intervalle vorkommenden Berührungskreise sein. Die Curve berührt zuerst den Kreis $\rho = \rho_1$, dann der Reihe nach die Kreise $\rho = \bar{\rho}_1$, $\bar{\rho}_2 \cdots\cdots$ und zuletzt den Kreis $\rho = \rho_2$. Dass die Curve bezüglich des Radius-Vectors $\rho = \rho_1$ symmetrisch ist, bedarf kaum eines Beweises, wenn wir u und v als Funktion von t auffassen.

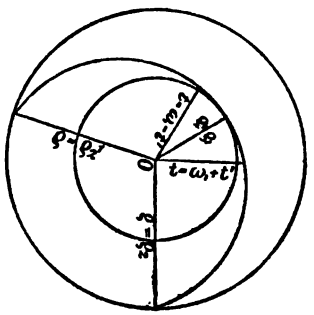


Fig. (σ).

Es ist nur nötig (Figur σ) zu bemerken, dass

$$\rho = \sqrt{F(p(\omega_1 - t'))} = \sqrt{F(p(\omega_1 + t'))}$$

ist, welches ja selbstverständlich ist, und

$$U(\omega_1 + t') - U(\omega_1) = U(\omega_1) - U(\omega_1 - t').$$

Nun ist

$$U(\omega_1 + t') - U(\omega_1)$$

$$= \int_{\omega_2}^{\omega_1 + t'} \frac{C}{2F(p(t))}\,dt - \int_{\omega_2}^{\omega_1} \frac{C}{2F(p(\theta))}\,dt = \int_{\omega_1}^{\omega_1 + t'} \frac{C}{2F(p(t))}\,dt$$

$$= -\int_{1}^{\omega_1 - t'} \frac{C}{2F(p(t))}\,dt = -\int_{\omega_1}^{\omega_2} \frac{C}{2F(p(t))}\,dt - \int_{\omega_2}^{\omega_1 - t'} \frac{C}{2F(p(t))}\,dt$$

$$= \int_{\omega_2}^{\omega_1} \frac{C}{2F(p(t))}\,dt - \int_{\omega_2}^{\omega_1 - t'} \frac{C}{2F(p(t))}\,dt = U(\omega_1) - U(\omega_1 - t'), \text{ q.e.d.}$$

Ebenso ist die Curve bezüglich des Radius vector $\rho = \rho_2$, $t = \omega_2$ symmetrisch und hinsichtlich aller Radii Vectores, welche t gleich einer Halbperiode entsprechen. Die Curve wird sich daher, nachdem sie einmal von ρ_1 nach ρ_2 und von dort nach ρ_1 zurückgelaufen ist, congruent wiederholen.

Wenn der Winkel U_{ab} zwischen ρ_1 und ρ_2 gleich $\frac{2m+1}{2n} \cdot \pi$ ist, so wird $\theta = (2m+1)\pi$ und $\rho = \rho_2$ nach $2n$-Zügen der Curve. Nach $4n$-Zügen ist $\theta = (4m+2)\pi$, u und v haben hier ihre ursprünglichen Werte angenommen und die Curve ist geschlossen. Da sie aber in der Mitte ihres Laufes den Punkt $v = 0$, $u =$

$-\rho_2$ erreicht, der mit dem Anfangspunkte $v = 0$, $u = \rho_2$ bezüglich der Geraden $u = 0$ symmetrisch ist, so ist die ganze Curve in Bezug auf diese Gerade $u = 0$ sowohl wie auf $v = 0$ symmetrisch. Ist $U_{ab} = \frac{2m}{2n+1} \cdot \pi$, so schliesst sich die Curve nach $2n + 1$-Zügen, ist aber nur bezüglich $v = 0$ symmetrisch.

§ 10.

Beweis zweier Sätze betreffs der Amplituden in den elliptischen Intervallen.

Beim Zeichnen der eben beschriebenen Figuren, berufen wir uns wieder auf die von Professor Klein gehaltene Vorlesung über lineare Differentialgleichungen. Dort sind Seite 376 ff. die conformen Abbildungen der Ebene $\eta = \frac{y_1}{y_2}$ auf die t-Ebene für verschiedene typische Werte von B untersucht und daraus die Grenzwerte der Amplituden φ_{ab} φ_{bc} φ_{cd} φ_{da} in den verschiedenen Intervallen festgestellt, wo

$$\varphi_{ab} = \frac{1}{i}\int_{\omega_1}^{\omega_1+\omega_2} \frac{C}{2F(x)}dt = \frac{2}{i}\int_{\omega_1}^{\omega_1+\omega_2} \frac{C}{2F(x)}dt = 2U_{ab}.$$

(Es ist bis jetzt U statt φ eingeführt worden, damit man U ohne Index als eine Variable $U = \int^x H(x)\,dx$ gebrauchen kann, ohne dadurch mit der Funktion

$$\varphi(x) = \tfrac{1}{4}p'^2(t)$$

Verwechslungen zu verursachen).

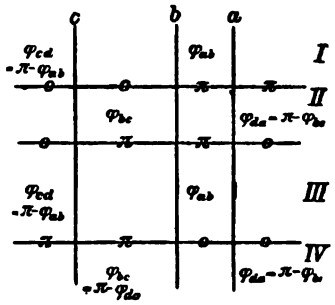


Fig. (τ).

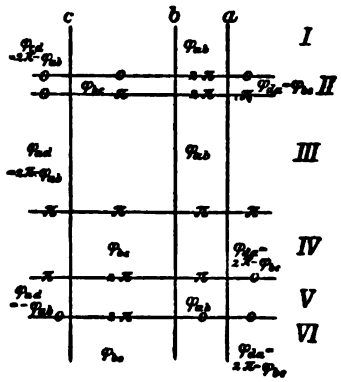


Fig. (υ).

Die Resultate dieser Ueberlegungen können wir dann schematisch zusammenstellen, indem wir die Ebene x, B zeichnen und die ausgezeichneten Linien mit den entsprechenden Werten von U_{ab}, U_{bc} und c versehen. Die Fig. (τ) und (υ) stellen diese Schemata für $n = 1$ und $n = 2$ dar. — Ehe wir dazu übergehen, diese Ergebnisse zur zeichnerischen Herstellung der Curven u, v zu gebrauchen, sollen die zwei Sätze, welche ihnen zu Grunde liegen und von Prof. Klein durch die geometrische oder physikalische Anschauung bewiesen sind, hier analytisch bestätigt werden.

Satz I. Die Amplituden eines inneren elliptischen Intervalles und des entsprechenden äusseren Intervalles sind durch eine der Relationen

$$\varphi_{ac} + \varphi_{bc} = h\pi, \text{ wo } h \equiv n \,(\text{mod. } 2),$$

oder

$$\varphi_{ab} + \varphi_{cd} = h'\pi, \text{ wo } h' \equiv n \,(\text{mod. } 2), \qquad \text{ist,}$$

verbunden, und die Zahl h oder h' hat für jeden Streifen I, II etc. einen constanten Wert[1]).

Wir führen den Beweis und finden die Werte von h und h' nur für die beiden Fälle $n = 1$ und $n = 2$, mit denen wir uns jetzt beschäftigen wollen. Die Methode lässt sich übrigens auch unmittelbar auf höhere Werte von n übertragen. Sei e derjenige der beiden Punkte a und c, welcher für den betreffenden Wert von B das Intervall $\widehat{de}$ zum elliptischen Intervalle macht, und e' der andere dieser Punkte, so dass $\widehat{be'}$ auch elliptisch wird, während $e = p(\omega)$ und $e' = p(\omega')$. Wir haben alsdann

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{de} &= \frac{1}{i}\int_0^{2\omega} \frac{C}{2F(x)}\,dt \\ \varphi_{be'} &= \frac{1}{i}\int_{\omega_2+\omega}^{\omega_2-\omega} \frac{C}{2F(x)}\,dt \end{aligned}\right\}.$$

Ist nun $n = 1$, so ist

$$F(x) = x - B = pt - pt_1,$$

wo $B = p(t_1)$ ist. Während B sich von $-\infty$ bis $+\infty$ stetig ändert, läuft t_1 um den Rand des Rechtecks $0, \omega_1, \omega_2, \omega_3$, wie in Figur ($\varphi$) dargestellt ist.

---

1) Dieser Satz ist etwas bestimmter ausgesprochen, als bei Prof. Klein, da dieser in seiner Behandlung von der Richtung der Winkel φ_{ab} u. s. w. abgesehen hat und nur ihre absoluten Beträge in Betracht gezogen hat.

Im Streifen I sind $\widehat{ba}$ und $\widehat{bc}$ elliptische Intervalle. Um die Integrale

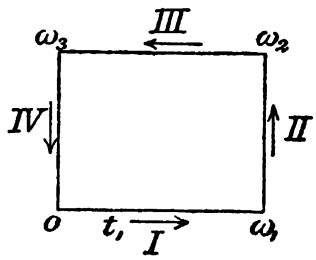


Fig. (φ).

$$\int_0^{2\omega_3} \frac{p' t_1}{2(pt-pt_1)}\,dt = -\varphi_{cd}$$

und

$$\int_{\omega_1}^{\omega_1+2\omega_3} \frac{p' t_1}{2(pt-pt_1)}\,dt = \varphi_{ab}$$

zu vergleichen, [wo C durch $p' t_1$ nach Gleichung (8) (Teil I) ersetzt ist] betrachten wir das halbe Periodenparallelogramm, $0, \omega_1, \omega_2 + 2\omega_3, 2\omega_3$. Der eine Unendlichkeitspunkt t, der Funktion $H(t)$ liegt auf der Seite $0, \omega_1$ und der dazu kongruente Punkt $t_1 + 2\omega_3$ auf $\widehat{\omega_1 + 2\omega_3}$, $\widehat{2\omega_3}$. Wir ziehen einen kleinen Halbkreis um t_1 und einen dazu kongruenten um $t_1 + 2\omega_1$ in der Weise, dass wir t_1 in dem dadurch entstehenden Bereich einschliessen und $t_1 + 2\omega_1$ ausschliessen. [Figur χ)] Wenn wir

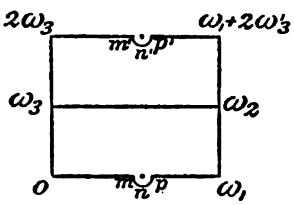


Fig. (χ).

$$\frac{p' t_1}{2(pt-pt_1)}\,dt$$

um den Rand dieses Bereiches integriren, heben sich die beiden Integrale $\int_{(0mnp\omega_1)}$ und $\int_{(\omega_1+2\omega_3, p', n', m', \omega_3}$ gegenseitig auf und es bleibt

$$\int_{2\omega_3}^{0} \cdots + \int_{\omega_1}^{\omega_1+2\omega_3} \cdots = (\varphi_{cd} + \varphi_{ab}) = 2\pi i K,$$

wo K das Residuum der Funktion

$$\frac{p' t_1}{2(pt-pt_1)}$$

für $t = t_1$ ist. Wir haben also in I.

$$\text{I.} \qquad \varphi_{ab} + \varphi_{cd} = \pi.$$

Für die anderen Streifen II, III und IV wenden wir dasselbe Verfahren an. Innerhalb des in Frage kommenden Halbperiodenparallelogrammes ist immer ein Pol der Funktion vorhanden und wir haben

$$\text{II.} \quad \varphi_{bc} + \varphi_{da} = \pi,$$

$$\text{III.} \quad \varphi_{ab} + \varphi_{cd} = \pi,$$

$$\text{IV.} \quad \varphi_{bc} + \varphi_{da} = \pi.$$

Ist ferner $n = 2$, so betrachten wir ebenso das Integral

$$\int \frac{C}{2F(x)} \cdot dt.$$

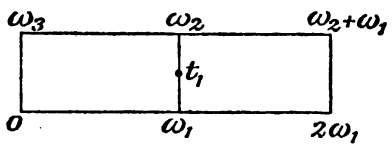


Fig. (α')

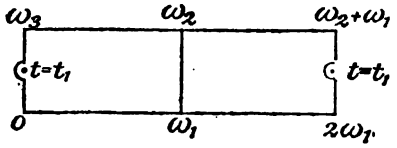


Fig. (γ').

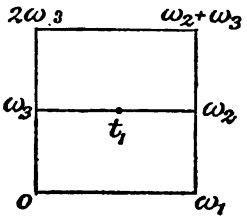


Fig. (β').

Wenn wir

$$F(x) = (pt-pt_1)(pt-pt_2)$$

setzen, bekommen wir aus den Gleichungen (9)

$$\frac{C}{F(x)} = \frac{p't_1}{pt-pt_2} + \frac{p't_2}{pt-pt_2} = H_1(t) + H_2(t).$$

Nun hat die Funktion H_1 im ganzen Periodenparallelogramm zwei Pole, $t = t_1$ und $t = -t_1$. Wenn wir dieses Parallelogramm mittels einer Linie, die durch ω_1 oder ω_2 hindurchgeht, halbieren, so werden diese Pole je in eine Hälfte fallen. Integrieren wir dann, wie für $n = 1$, um dieses Halbparallelogramm, während wir die etwa auf den Seiten liegenden Pole wie in den Figuren (α') bis (γ') mit Halbkreisen umgeben, so haben wir im allgemeinen:

$$(\varphi_{cd} + \varphi_{ab}) = \int_{(H_1)} \frac{p't_1}{2(pt-pt_1)}\,dt + \int_{(H_2)} \frac{p't_2}{pt-pt_2}\,dt = (R_1 + R_2) \cdot 2\pi i.$$

Nun wird $R_1 = +\frac{1}{2}$ oder $-\frac{1}{2}$ sein, je nachdem $+t_1$ oder $-t_1$ im Bereiche liegt, und $R_2 = +\frac{1}{2}$ oder $-\frac{1}{2}$ je nachdem $+t_2$ oder $-t_2$ in den Bereich fällt. $\varphi_{cd} + \varphi_{ab}$ kann also nur den Wert 2π oder Null haben.

Ebenso lässt sich $\frac{C}{F(x)}$ für höhere Werte von n in eine Summe von der Gestalt

$$\sum \frac{p' t_i}{2(pt - pt_i)}$$

ausdrücken, und das gesuchte Integral ist:

$$\varphi_{cd} + \varphi_{ab} = 2\pi \sum_1^n R_i = h\pi,$$

da $|R_i| = \frac{1}{2}$ ist. Wenn alle $R = \frac{1}{2}$ sind, so ist $h = n$, und, da $\sum_1^n R_i$ sich nur durch ganze Zahlen von n unterscheiden kann, so ist allemal

$$h \equiv n \pmod 2, \qquad \text{q. e. d.}$$

Um zu finden, in welchen Feldern der x, B-Ebene $h = 2$, und in welchen $h = 0$ für $n = 2$ ist, müssen wir wissen, wo die t_1 und t_2 für wechselndes B liegen, und zu diesen Zwecken untersuchen wir zunächst die Lage der Summe $t_1 + t_2$. Aus den Gleichungen (9) ist

$$p(t_1 + t_2) = \beta - \frac{\varphi(\beta)}{\varphi'(\beta)}.$$

Zeichnen wir jetzt die Curve, welche durch diese Relation in der Ebene p, β dargestellt wird, so können wir sehen, durch welche Werte p und also $t_1 + t_2$ hindurchläuft, während β von $+\infty$ bis $-\infty$ abnimmt. Es entsteht dann das Schema (δ'). Dieses Schema für $t_1 + t_2$ ergiebt zusammen mit der Grundfigur (2) die Lage der Punkte t_1 und t_2, wie die Schemata (ε') und (ζ') zeigt.

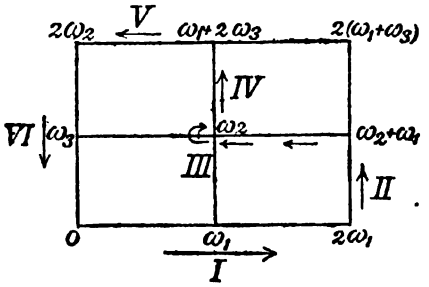


Fig. (δ').
$t_1 + t_2$.

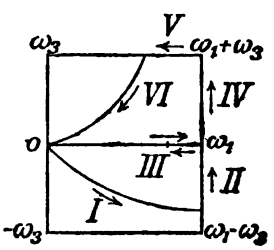


Fig. (ζ').
t_1.

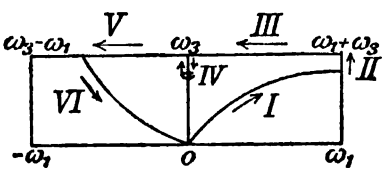


Fig. (ε').
t_2.

Danach bekommen wir die 6 Figuren (η') bis (μ') und die ersten unter ihnen geschriebenen Relationen:

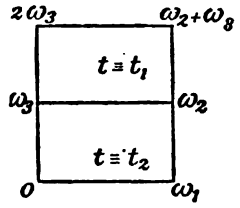


Fig. (η').

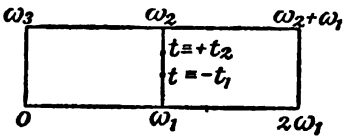


Fig. (ϑ').

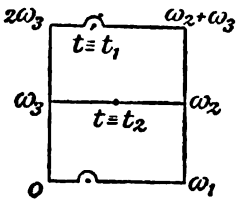


Fig. (ι').

I, $\varphi_{ab} + \varphi_{cd} = 2\pi$,
$|\varphi_{ab}| - |\varphi_{cd}| = 2\pi$.

II, $\varphi_{da} + \varphi_{bc} = 0$,
$|\varphi_{da}| - |\varphi_{bc}| = 0$.

III, $\varphi_{ab} + \varphi_{cd} = 2\pi$,
$|\varphi_{ab}| + \varphi_{cd}| = 2\pi$.

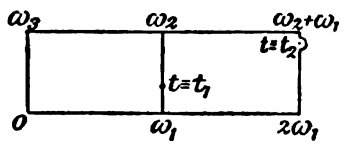


Fig. ($\varkappa'$).

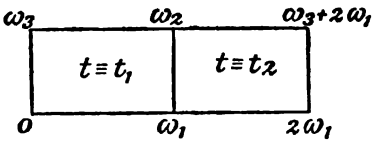


Fig. (μ').

IV, $\varphi_{da} + \varphi_{bc} = 2\pi$,
$|\varphi_{da}| + \varphi_{bc}| = 2\pi$,

VI, $\varphi_{da} + \varphi_{bc} = 2\pi$,
$|\varphi_d^a| + |\varphi_{bc}| = 2\pi$.

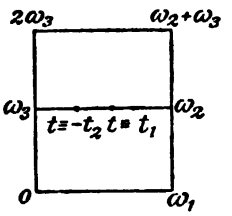


Fig. (λ')

V, $\varphi_{ab} + \varphi_{cd} = 0$,
$|\varphi_{ab}| - |\varphi_{cd}| = 0$.

Um die Relationen zwischen den absoluten Werten der Winkel φ_{da} zu bekommen, ist es nur nötig, zu bemerken, dass auf den gegenüberliegenden Seiten der Halbperiodenparallelogramme *dt* entgegengesetzte Vorzeichen hat. In Folge dessen haben nämlich die entsprechenden Integrale φ_{da} und φ_{bc} verschiedene Vorzeichen, wenn der Integrand $\frac{C}{2F(x)}$ für beide Intervalle dasselbe Vorzeichen hat, d. h. wenn in dem dazwischen liegenden hyperbolischen Intervalle keine oder eine gerade Anzahl von Nullstellen von $F(x)$ liegt. Wenn dagegen eine ungerade Anzahl von Nullstellen dazwischenliegt liegt, haben die beiden Amplituden gleiche Vorzeichen. Im ersteren Falle ist die Differenz der abso-

luten Werte, im zweiten ihre Summe gleich $h\pi$ oder $h'\pi$. Daraus entstehen die zweiten Relationen, welche unter den Figuren (η') bis (μ') mitgetheilt sind und welche mit denen von Professor Klein übereinstimmen.

Wenn wir B von der einen zur anderen Grenze eines Streifens variiren lassen, müssen sich die entsprechenden $\bar{\varphi}$ von dem auf der einen bis zu dem auf der anderen Grenze liegenden Werte bewegen. Folgender Satz erlaubt uns auch zu sagen, dass sie sich immer in demselben Sinne bewegen und dass infolgedessen einem gegebenen, zwischen diesen Grenzen liegenden Werte von φ ein einzelner Wert von B entspricht.

Satz II. Die elliptische Amplitude ist in jedem Felde eine monotone Funktion von B.

Nehmen wir an, das betreffende Intervall sei eines der äusseren, dann ist

$$\varphi_{de} = \int_0^{2\omega} \frac{C}{2F(x)}\,dt.$$

Ist nun $n = 1$ so ist

$$F(x) = (x-B) = (pt-pt_1),$$

$$C = p't_1.$$

Nun ist

$$\int_0^{\omega} \frac{p't_1}{2(pt-pt_1)}\,dt = \omega\cdot\zeta(t_1) - \eta\cdot t_1 + \text{Const.} = \tfrac{1}{2}\varphi_{de}(B).$$

Denken wir uns nun in der Ebene y, B die Curve

$$y = \varphi_{de}(B)$$

gezeichnet, indem wir in den hyperbolischen Intervallen

$$R_{de} = e^{\varphi_{de}}$$

setzen. Das Intervall $\widehat{be}$ möge ein hyperbolisches Intervall sein. Die Werte von φ_{de} auf den beiden Grenzen dieses Intervalles sind einander gleich. Die Curve muss also mindestens ein Maximum oder ein Minimum zwischen $B = e$ und $B = b$ besitzen. Differenzieren wir nun nach B, so bekommen wir:

$$\frac{d\varphi_{de}}{dB} = 2\left(\omega\frac{d\zeta(t_1)}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dB}{dt_1}} - \eta\frac{dt_1}{dB}\right)$$

$$= 2\left(\frac{-\omega B-\eta}{C}\right).$$

Die Bedingung eines Maximums ist also:

$$\omega B = -\eta.$$

Die Funktion φ_{d_n} hat also nur ein Maximum oder ein Minimum und dieses liegt, wie wir eben gezeigt haben, in einem hyperbolischen Intervalle. Sie hat also weder Maxima noch Minima in den elliptischen Intervallen und ist dort eine monotone Funktion von B q. e. d.

Betrachten wir nunmehr den Fall $n = 2$, so haben wir die Gleichungen

$$F(x) = (pt-pt_1)(pt-pt_2),$$

$$C = p't_1(pt_1-pt_2) = p't_2(pt_2-pt_1),$$

also

$$\frac{C}{F(x)} = \frac{p't_1}{(pt-pt_1)} + \frac{p't_2}{(pt-pt_2)},$$

$$\int_0^{2\omega} \frac{C}{2F(x)}\,dt = 2(\omega\cdot\zeta(t_1)-\eta\cdot t_1+\omega\cdot\zeta(t_2)-\eta\cdot t_2)$$

$$= 2\{\omega(\zeta(t_1+t_2)-\xi)-\eta(t_1+t_2)\} \qquad (\alpha)$$

wo ξ eine Funktion von β ist. Setzen wir

$$t_1+t_2 = \nu,$$

so ist

$$\int_0^{2\omega} \frac{C}{2F(x)}\,dt = 2\{(\omega\zeta(\nu)-\xi)-\eta\cdot\nu\}.$$

Setzen wir jetzt, wie früher, $B = 6\beta$, so sind wieder nach Gleichung (9)

$$p\nu = \frac{\beta\varphi'(\beta)-\varphi(\beta)}{\varphi'(\beta)}, \qquad p'\nu = \frac{2\varphi(\beta)}{\varphi'(\beta)}\xi,$$

wo

$$\xi = \sqrt{\frac{3\beta\varphi'(\beta)-\varphi(\beta)}{\varphi'(\beta)}}$$

ist und

$$C^2 = -\varphi'(\beta)(\varphi(\beta)-3\beta\varphi'(\beta)) = -\varphi'^2(\beta)\cdot\xi^2.$$

Differenzieren wir Gleichung (α) nach β, so erhalten wir:

$$\frac{d\varphi_{d_n}}{d\beta} = \omega\left(\frac{d\zeta\nu}{d\beta}-\frac{d\xi}{d\beta}\right)-\eta\frac{d\nu}{d\beta},$$

$$\frac{d\nu}{d\beta} = \frac{1}{\frac{dp\nu}{d\nu}}\cdot\frac{dp\nu}{d\beta} = \frac{\varphi\varphi''}{\varphi'^2p'\nu} = \frac{\varphi''}{2\varphi'}\cdot\frac{1}{\xi},$$

$$\frac{d\xi_\nu}{d\beta} = \frac{1}{2\xi}\left(3 - \frac{\varphi'^2 - \varphi_2\varphi''}{\varphi^2}\right) = \frac{2\varphi'^2 + \varphi\varphi''}{2\xi\cdot\varphi'^2},$$

$$\frac{d\zeta_\nu}{d\beta} - \frac{d\xi}{d\beta} = \frac{\varphi'}{2\xi\varphi'^2}\left(-6\beta^2 - 6\beta^2 + \frac{g_2}{2}\right)$$

$$= -\frac{6}{\varphi'\xi}\left(\beta^2 - \frac{g_2}{24}\right)$$

$$\frac{d\varphi_{d_\nu}}{d\beta} = \frac{-1}{\varphi'\xi}\left\{\left(6\beta^2 - \frac{g_2}{4}\right)\omega + 3\beta\eta\right\}$$

$$= \frac{1}{C}\left(6\omega\beta^2 + 3\eta\beta - \frac{g_2}{4}\omega\right).$$

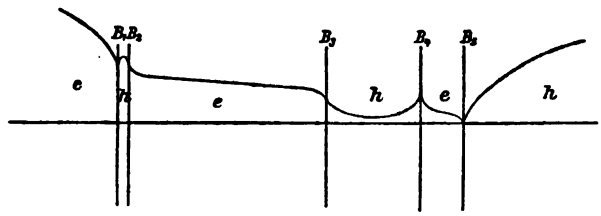


Fig. (ν').

Die Funktion φ_{d_ν} hat demnach zwei Maxima oder Minima. Unter den 6 Intervallen der β-Axe sind drei hyperbolisch und in zwei von ihnen hat φ_{d_ν} auf beiden Grenzen gleiche Werte. Jedes dieser Intervalle muss daher einen Maximal- oder Minimalwert von φ_{d_ν} enthalten. In den elliptischen Intervallen können also keine Maximal- bezw. Minimalwerte vorkommen und φ_{d_ν} ist innerhalb jedes solchen Intervalles eine monotone Funktion von β. Nach Satz I ist die Summe einer innen liegenden elliptischen Amplitude und der entsprechenden aussen liegenden Amplitude constant. Daher muss auch die Amplitude $\varphi_{bc'}$, eine monotone Funktion von β sein. In einem inneren Intervalle $\widehat{bc'}$ nehmen die den ausgezeichneten Werten von B entsprechenden Werte von $\varphi_{bc'}$ entweder beständig zu oder beständig ab. $\varphi_{bc'}$ ist also im ganzen Intervalle bc' eine monotone Funktion von B und infolgedessen B eine eindeutige Funktion von $\varphi_{\widehat{bc'}}$, wenn wir von den hyperbolischen Streifen absehen. Dies ist dasselbe Resultat, welches von Professor Klein mittels des sogenannten Oscillationssatzes abgeleitet worden ist. Die hier gegebene Methode der Beweisführung scheint sich nicht auf höhere Werte von n anwenden zu lassen und es scheint sehr zweifelhaft, ob der Satz für grössere Werte von n gilt.

§ 11.

Zeichnerische Darstellung der Curven $u = u(t)$, $v = v(t)$ in der Ebene u, v.

Wir haben jetzt die hauptsächlichen Hülfsmittel kennen gelernt, welche nötig sind, um die betrachteten Figuren zu zeichnen. Wollen wir Näheres über die Wendepunkte wissen, so finden wir leicht, dass solche nur dann eintreten, wenn $Ax + B = 0$ ist. Es ist nämlich:

$$\frac{d^2v}{du^2} = \frac{-4iC(Ax+B)F^3(x)}{(2F'(x)\sqrt{\varphi(x)}\cdot u - iCv)^3},$$

während $F(x)$ keine Nullstellen in den elliptischen Intervallen hat. Damit die einem gegebenen Felde entsprechenden Curven Wendepunkte haben, muss die Linie $Ax + B = 0$ dieses Feld durchziehen. In den Figuren (ξ') und (σ') ist diese Gerade für $n = 1$ bezw. $n = 2$ gezeichnet und in (σ') ist auch die Gerade $6(x-\beta) = 6x - B = 0$, deren Verlauf in einem Intervalle die Bedingung liefert, dass für einen gegebenen darin liegenden Wert von B unsere Curven einen dritten Grenzkreis haben, gezeichnet.

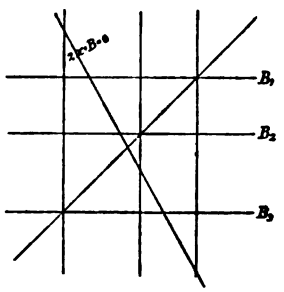


Fig. (ρ').

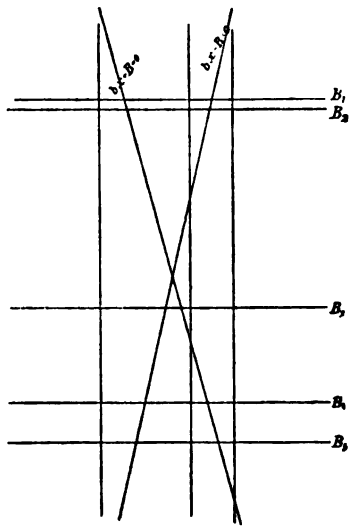


Fig. (σ').

Wir zeichnen jetzt die Figuren für das innere Intervall $\widehat{ab}$

und das äussere Intervall $\widehat{da}$. Die für $\widehat{bc}$ und $\widehat{cd}$ haben ähnliche Formen wie jene.

Die Figuren (23) zeigen diese Curven für $n = 1$ im Intervalle $\widehat{ab}$.

Für grosse Werte von B sind die beiden Grenzkreise $\rho = \rho' = \sqrt{F(b)}$ und $\rho = \rho_2 = \sqrt{F(a)}$ sehr gross und liegen sehr nahe zusammen. Die Curven winden sich in einem sehr schmalen Ringe herum. Die Radien ρ_1 und ρ_2 werden mit abnehmendem B kleiner und für $B = B_1$ wird $\rho_2 = 0$. Für sehr grosses B wird auch φ_{ab} sehr gross und nimmt ebenfalls mit kleiner werdendem B beständig ab, bis es in $B = B_1$ gleich π wird. Da die Linie $2x + B = 0$ dieses Intervall nicht kreuzt, haben diese Curven, wie man auch zudem von vornherein annehmen möchte, keine Wendepunkte. Auf der oberen Grenze des Streifens III hat die Amplitude wieder den Wert π und einer der Kreise, und zwar dieses Mal $\rho = \rho_1$, ist in einen Punkt ausgeartet. Trotzdem die Amplitude hier $< \pi$ wird, bleiben die Curven noch eine Zeit lang ohne Wendepunkte.

Die Figuren (24) und (25) zeigen die entsprechenden Curven für $n = 2$. In einem Teile der Streifen I und III sind 3 Grenzkreise vorhanden und nur in V haben die Curven Wendepunkte.

In dem äusseren Intervalle haben die Curven nur einen Grenzkreis, da der eine den Radius $\rho = \sqrt{F(d)}$ hat und in's Unendliche hinausgerückt ist, und $x - \beta = 0$ nirgends in $\widehat{da}$ ein elliptisches Feld durchzieht. Wendepunkte kommen nur in dem unteren Teil von VI vor. Die Figuren (26) zeigen einige dieser Curven.

Um sich zu überzeugen, dass der Znsammenhang der Aeste im Unendlichen der in den Figuren angedeutete ist, brauchen wir nur die Reihen für u und v als Functionen von t aufzustellen. Es ist nämlich (siehe Halphen, Bd. II S. 524 u. ff. u. Bd. I S. 237):

$$u = \frac{1}{t^2}(1 - \beta t^4 \cdots\cdots),$$

$$v = \frac{C}{152} t^3 \pm \cdots\cdots.$$

Bei $t = 0$ wechselt v sein Vorzeichen, während dasjenige von u ungeändert bleibt. Die Curve hat also (Fig. *da*, II) bei $u = \infty$, $v = 0$ und deshalb auch bei den congruenten Punkten

$$\begin{cases} u = \lim\limits_{x=\infty} \sqrt{F(x)} \sin 2m\varphi, \\ v = \lim\limits_{x=\infty} \sqrt{F(x)} \cos 2m\varphi, \end{cases} \qquad m = 0, 1, 2 \ldots$$

einen Rückkehrpunkt.

Teil V.

Anwendungen in der Mechanik.

§ 12.

Die Gleichung des sphärischen Pendels als specieller Fall der Hermite'schen Differentialgleichung.

Als Anwendung unserer Untersuchungen wollen wir einige Beispiele dieser Betrachtungen in der Mechanik vorführen, und zwar zuerst das Beispiel des sphärischen Pendels, das Hermite in den schon erwähnten „applications des fonctions elliptiques" behandelt hat, um nachher zu dem allgemeinen Falle des Kreisels überzugehen. Dieses Problem wird in den meisten grösseren Lehrbüchern der Mechanik und häufig auch in solchen über elliptische Funktionen behandelt, z. B. findet sich bei Halphen eine sehr kurze Behandlung, in einem Buche von Schellbach „die Lehre der elliptischen Integrale" steht dagegen eine sehr ausführliche Behandlung des Problems.

Wenn t die Zeit ist, u, v und w die rechtwinkligen Coordinaten des Pendels sind und seine Länge die Einheit ist, so entnehmen wir von den von Hermite benutzten Formeln folgende:

$$\left.\begin{aligned} u - iv &= e^{-\int \frac{w\,dw - il\,dt}{1-w^2}} \\ u + iv &= e^{-\int \frac{w\,dw + il\,dt}{1-w^2}} \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = -\{2g(w^3-1)(w+c)+l^2\}, \tag{2}$$

wo g das Gewicht des Pendels, gc die lebendige Kraft und l die Flächengeschwindigkeit um die Verticale ist und

$$\frac{d^2(u+iv)}{dt^2} = -g(3w+2c)(u+iv). \tag{3}$$

Um jetzt Anschluss an unsere frühere Bezeichnungsweise zu erhalten, schreiben wir:

$$t' = \sqrt{-\frac{g}{2}}\cdot t,$$

$$w = x - \frac{c}{3} = x - \beta,$$

$$l = \sqrt{2g}\cdot L$$

so ist

$$\left.\begin{aligned} u+iv &= \sqrt{(x-\beta)^2-1}\cdot e^{\int \frac{2L}{(x-\beta)^2-1}\cdot dt'} \\ u-iv &= \sqrt{(x-\beta)^2-1}\cdot e^{-\int \frac{2L}{(x-\beta)^2-1}\cdot dt'} \end{aligned}\right\}, \qquad (1)'$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 4\left\{(x-\beta+1)(x-\beta-1)(x+2\beta)+\frac{l^2}{2g}\right\}$$

und

$$t = \int \frac{dx}{2\sqrt{(x-\beta+1)(x-\beta-1)(x+2\beta)+\frac{l^2}{2g}}} = \int \frac{dx}{2\sqrt{\varphi(x)}} \Bigg\}, (2)'$$

$$\frac{d^2(u+iv)}{dt'^2} = 6(x+\beta)(u+iv). \qquad (3)'$$

Dies ist genau die frühere Form der Gleichung für $n = 2$. Zwei Coordinaten des Pendels sind also die u und v, die wir in Teil IV als Lösungen der Hermite'schen Gleichung im elliptischen Intervalle betrachtet haben, und die dritte w (welche in der Richtung der Schwere gelegt ist) mit einer Constanten vermehrt, ist die unabhängige Variable x der Form (2) derselben Gleichung, während t', die unabhängige Variable in (1)', ein imaginaires Multiplum der Zeit ist.

Die bisherigen Untersuchungen ermöglichen uns, die Relationen zwischen allen diesen Grössen zu übersehen. Die Figuren (17), (19) und (21) stellen typische Formen der Curven $u = u(t')$ und $v = v(t')$ dar. Wollen wir das Verhalten der Coordinaten u und v als Funktionen der Zeit kennen lernen, so wird dieses Verhalten durch ähnliche Curven dargestellt.

Denken wir uns die Bahn des Pendels auf der Einheitskugel, so können wir diese Bahn durch ihre Projection auf eine der 3 Coordinatenebenen darstellen. Die Projection in der Ebene $v = 0$ muss sich unter den stark punktirten Curven in den Figuren (10) bis (15) befinden. Die Grenzlinien $x = b$ und $x = a$ oder c werden die Projectionen zweier Parallelkreise auf der Kugel sein, während die beiden Hälften der Hülfscurve, welche die anderen zwei Grenzen bilden, die Meridiane in der Ebene $v = 0$ sind ($x = b$ muss eine der Grenzlinien sein, da $|w| = |x-\beta| < 1$ ist, also x im allgemeinen eine endliche Grenze haben muss, die äusseren Intervalle können nicht in Betracht kommen). Ebenso befindet

sich die Projection in der Ebene $u = 0$ unter den Curven [1]) in demselben Intervalle. Es ist aber das am häufigsten angewandte Verfahren, die Projection in der Ebene $w = 0$ zu betrachten. Hier knüpfen sich unsere Untersuchungen genau an Teil IV an.

Um alle diese Entwickelungen anzuwenden, müssen wir jedoch finden, in welchem Felde oder in welchen Feldern der Ebene x, B sich das betrachtete elliptische Intervall befindet, und dazu ist ein näheres Studium der Relation zwischen x und t' nötig. In § 15 wird noch ein anderes Verfahren zur Untersuchung der Pendelbahn angegeben.

§ 13.

Vergleich der Grundebene x, β des Pendels mit der allgemeinen Grundebene x, B.

Bis jetzt haben wir nur solche Fälle der Hermite'schen Gleichung behandelt, in denen die singulären Punkte constant sind. Lassen wir diese variabel werden, so werden unsere Curven auseinander oder zusammen gezogen, ohne ihre wesentlichen Eigenschaften zu verändern. Der vorliegende Fall des sphärischen Pendels liefert uns ein gutes Beispiel eines solchen Falles, denn die Gleichung:

$$\varphi(x) = (x-\beta+1)(x-\beta-1)(x+2\beta) + L^2,$$

(wo L^2 zur Abkürzung für $\frac{l^2}{2g}$ gesetzt ist) zeigt, dass a, b, c, (die Wurzel der Gleichung $\varphi(x) = 0$) nicht mehr unabhängige Grössen sondern Functionen von β und einer neuen Constante L sind.

Setzen wir

$$4\varphi(x) = 4x^3 - g_2 x \cdot - g_3,$$

so bekommen wir

$$g_2 = 4(3\beta^2+1), \qquad g_3 = -4(2\beta(\beta^2-1)+L^2).$$

Tragen wir diesen Wert von g_2 in $F(x)$ ein, so ist:

$$F(x) = (x-\beta)^2 - 1,$$

wie auch aus den Ausdrücken für $u - iv$ und $u + iv$ hervorgeht. Setzen wir ferner diese Werte auch in C^2 ein, so kommt heraus:

$$C^2 = 16L^2, \qquad \text{(Gleichg. 9, Teil I)}$$

---

1) Ich habe nur zwei dieser Curven gezeichnet; diese befinden sich im Streifen $\widehat{ab}$, Fig. (8) und Fig. (14).

C ist dann eine von β unabhängige Grösse. Setzen wir endlich diese Werte von C und F in die Gleichungen

$$y_1 = \sqrt{F(x)} \cdot e^{\int \frac{C}{4F\sqrt{\varphi}} dx}$$

und

$$y_2 = \sqrt{F(x)} \cdot e^{-\int \frac{C}{4F\sqrt{\varphi}} dx}$$

ein, so entstehen die eben abgeleiteten Werte von $u + iv$ und $u - iv$.

Die Grundebene x, β hat jetzt ein ganz anderes Aussehen. Die singulären Stellen, welche früher von B unabhängig waren, lagen daher in der Ebene x, B auf 3 parallelen Geraden. Jetzt ist der Ort der singulären Stellen eine Curve dritten Grades, die wir die Curve S nennen wollen. Dieselbe hat für alle Werte von L die Asymptoten $x - \beta = 1$, $x - \beta = -1$ und $x + 2\beta = 0$, von denen die zwei ersten die Curve im Unendlichen einfach berühren, letztere aber ein Tangente in einem Wendepunkte ist. Nur wenn $L = 0$ ist, artet die Curve in die drei Geraden

$$x - \beta = 1,$$
$$x - \beta = -1,$$
$$x + 2\beta = 0,$$

aus. Fig. (27) zeigt die neue Ebene x, β. Zur Unterscheidung wollen wir diese die Grundebene (P) nennen, und die allgemeine Grundebene x, B (Fig. 2) mit (A) bezeichnen. Die Ebene P lässt sich durch die zwei die Curve S berührenden Geraden $\beta = \text{Const.}$ in 3 Bereiche teilen, von denen der erste (1) und der letzte (3) ihre entsprechenden Bereiche in der Ebene (A) finden müssen, wenn in (A) geeignete Werte von a, b, c angenommen sind. Der Bereich (2) dagegen, der für jeden seiner Werte von β nur einen reellen singulären Punkt enthält, hat in A kein Gegenstück.

Da L' von β unabhängig ist, haben wir keine Werte von β welche $C(= 4L)$ gleich Null machen, also keine weitere Einteilung der Ebene P.

Nun muss der den Pendelschwingungen entsprechende Bereich dieser Ebene zwischen den Linien $x - \beta + 1 = 0$ und $x - \beta - 1 = 0$ liegen, da $|w| < 1$ sein soll. Es kann daher nur der Bereich $1, \widehat{ab}$ der gesuchte sein, wenn wir, wie vorher, die singulären Punkte der Reihe nach mit a, b und c bezeichnen.

Die Frage ist nun: welchem Intervalle der Ebene (A) entspricht unser Intervall $1, \widehat{ab}$ in (P)? Früher wählten wir die singulären Punkte nach Belieben, β blieb noch ein variabler Parameter und (P) war eine Funktion von β. Sind jetzt die singulären Punkte bestimmt, so sind es β und C dadurch auch, jedoch so, dass die erwähnte Relation zwischen C und β noch besteht. Bestimmen wir umgekehrt β und C, so sind dadurch die singulären Punkte festgelegt, und wir müssen unsere Ebene (A) in Uebereinstimmung damit bringen. Wir denken sie etwa auseinandergezogen, oder zusammengeschrumpft, bis die Linien $x = a$, $x = b$, $x = c$ mit den Punkten in (P) für das betreffende β zusammenliegen. Eine solche Verschiebung dieser Punkte kann aber auf die allgemeinen Verhältnisse in der Ebene (A) keine Wirkung haben, denn die Verteilung der Nullstellen zwischen den singulären Punkten ist für die ausgezeichneten und deshalb für alle Werte von B von der Lage dieser Punkte unabhängig. Die Nullpunkte

$$F = y_1 \cdot y_2 = 0$$

werden natürlich bei der Aenderung der a, b und c ihre Lage ändern, liegen aber immer in denselben Intervallen und ändern ihren Realitätszustand nicht. Nehmen wir also einen beliebigen Wert von β an, der in den Streifen 1 liegt. Die singulären Punkte und die Nullstellen liegen wie in Figur α.

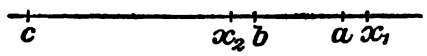


Fig. (α).

Der einzige Streifen in A, in welchem diese Reihenfolge vorkommt, ist der Streifen III. Der Streifen 1 kann demnach keinem anderen Streifen der Ebene A entsprechen, ausser III, und das Feld $1, \widehat{ab}$ entspricht dem Felde III, $\widehat{ab}$. Entspricht er nun dem ganzen Streifen III? Um diese Frage zu beantworten, müssen wir zusehen, wo die Grenzen von 1, $\beta = \infty$ und $a = b$, ihre entsprechenden Werte in A finden.

Wird β sehr gross, so nähern sich die 3 Zweige der Curve S ihren Asymptoten, a, b und c nähern sich dann den Werten

$$a = \beta + 1, \qquad b = \beta - 1, \qquad c = -2\beta,$$

also ist $\beta = -\frac{c}{2}$. Zugleich ist die obere Grenze $\beta = \beta_2$ des Intervalles III, $= -\frac{c}{2}$; $\beta = \infty$ entspricht somit der oberen Grenze

dieses Streifens; welcher also für alle Werte von L erreicht wird, da die genannten Asymptoten von L unabhängig sind.

Um die andere Grenze $a = b$ zu finden, betrachten wir die Gleichung, deren Wurzeln a, b, c sind:

$$x^3 - (3\beta^2 + 1)x + 2\beta(\beta^2 - 1) + L^2 = 0.$$

Die Bedingung dafür, dass diese Gleichung eine Doppelwurzel hat, ist:

$$\Delta = \{4(3\beta^2 + 1)\}^3 - 27\{8\beta(\beta^2 - 1) + L^2\}^2 = 0.$$

Diese Gleichung bestimmt für gegebenes L den Wert β_a von β, der einem Zusammenfallen der Wurzeln a und b entspricht. Schreiben wir $\beta = \beta_a$ und reduciren diese Gleichung, so bekommen wir:

$$3\beta_a^4 - L^2\beta_a^3 - \tfrac{3}{2}\beta_a^2 + \beta_a L^2 - \frac{L^4}{4} + \frac{1}{27} = 0.$$

Wenn wir jetzt der Kürze halber $3\beta_a = \beta'$ und $L^2 = K$ schreiben, so können wir die so entstehende Gleichung

$$G(\beta', K) = \beta'^4 - K\beta'^3 - 2\beta'^2 + 9K\beta' - \frac{27}{4}K^2 + 1 = 0$$

als Gleichung einer Curve in der Ebene K, β' auffassen. Diese Curve Fig. (28) besteht aus vier Zweigen, von denen die zwei, welche negativen Werten von K, also imaginaeren Werten von L entsprechen, uns nichts angehen. Von den beiden anderen Zweigen entspricht offenbar der für den kleineren Wert von β' der Spitze des unteren Zweiges der Curve S, welcher im Streifen 3 liegt. Es bleibt uns infolgedessen nur ein einzelner Zweig übrig, welcher L^2 als eindeutige Funktion von β_a definirt. Wenn K kleiner wird, nimmt β_a beständig ab, und erst für $K = 0$ erreicht β_a den Wert $-\frac{b}{2}$, und somit die untere Grenze des Streifens III, wie wir sofort einsehen, wenn wir $b = -2\beta$ in der Gleichung für b, d. h. in $\varphi(b) = 0$ einsetzen.

Wir haben also den dem Bereiche 1, $\widehat{ab}$ der Ebene P entsprechenden Teil der Ebene A gefunden und können unsern Schluss folgendermassen aussprechen:

Die den Schwingungen des sphärischen Pendels entsprechenden Curven gehören dem Felde III, $\widehat{ab}$ an, aber nur einem bestimmten Teile des Feldes, nämlich dem Teile, welcher zwischen $B = B_2$ und einer von L abhängenden, unteren Grenze $B = B_a$ einge-

schlossen ist. Für $L = \infty$ liegen B_3 und B_α zusammen im Unendlichen, und während L^2 kleiner wird, nimmt B_α beständig ab, bis es für $L = 0$ den Wert $B_\alpha = B_3 = -3b$ annimmt. (Fig. 28).

Nun können wir Beispiele von den diesem Falle entsprechenden Curven unter den in dem vorhergehenden Teile gezeichneten finden. Fig. (19) zeigt das Verhalten der Coordinate u als Funktion von t, Fig. (12) die Projection der Bahncurve des Pendels in den Ebenen $u = 0$. Wir sehen, dass die Hülfscurve $y = \sqrt{F(x)}$ hier in der That ein Kreis ist, welches mit der früheren Aussage übereinstimmt, dass diese aus den beiden in $u = 0$ bezw. $v = 0$ liegenden Meridianen der Kugel bestehen. Da dieses Feld und das Feld I, $\widehat{bc}$ die einzigen sind, deren Hülfscurven nur aus Kreisen bestehen, hätten wir auch daraus schliessen können, dass eins dieser Felder das gesuchte ist. Die Curven

$$u = u(t), \quad v = v(t)$$

im vorigen Paragraphen stellen eine orthogonale Projection dieser Bahn auf die Horizontalebene dar. Diese Curven haben 3 Berührungskreise, wenn $x = \beta$ im Intervalle liegt. Da für diesen $w = x - \beta$ ist, so entspricht dieser dritte Kreis dem Aequator der Kugel und die Berührung dieses Kreises findet nur in der Projection statt. Auf der Kugel selbst giebt es also nur zwei Berührungskreise. Der Winkel $2U_{ab}$ entspricht einem ganzen Zuge der Curve von ihrer ersten Berührung mit einem der Grenzkreise:

$$\rho = \sqrt{F(b)} \text{ und } \rho = \sqrt{F(a)}$$

bis zur zweiten Berührung mit demselben Kreise. Er hat den Wert:

$$2iU_{ab} = \int_b^a \frac{C}{2F\sqrt{\varphi}}\,dx = \int_{\omega_2}^{\omega_1} \frac{C}{(pt - pt_1)(pt - pt_2)} \cdot dt$$

$$= 2\omega_3(\zeta t_1 + \zeta t_2) - 2\eta_3(t_1 + t_2).$$

Für unseren Fall ist $pt_1 = \beta + 1$, $pt_2 = \beta - 1$.

Betrachten wir nochmals die Figur (28) der Ebene K, β'. Die Curve entspricht, wie wir gezeigt haben, solchen Werten von $K = L^2$, mit $\beta' = 3\beta$, welche der Spitze der Grenzcurve S angehören. Für kleine Werte von β (bei gegebenen L) werden a und b imaginaer, so dass nur die im schraffirten Bereiche vorkommenden Werte von L und β Pendelschwingungen darstellen. Die

Verteilung der Werte von U_{ab} wird vielleicht verständlicher werden, wenn wir diejenigen, welche Wertpaaren K, β' auf der Grenze des Bereiches entsprechen, suchen. Von der Grenze $\beta' = \infty$ wissen wir schon, dass, da

$$pt_1 = \beta + 1 = a, \quad pt_2 = \beta - 1 = b$$

ist, $t_1 = \omega_1, \; t_2 = \omega_2$

ist, also $i \cdot U_{ab} = \omega_2(\eta_1 + \eta_2) - \eta_2(\omega_1 + \omega_2)$

$$= 2(\omega_2 \eta_1 - \eta_2 \omega_1) = \pi i$$

wird. Auf der Grenze $K = 0$ sind überall

$$\begin{cases} t_1 = \omega_1, \\ t_2 = \omega_2, \end{cases}$$

also ist auf dieser Grenze $iU_{ab} = \pi \cdot i$.

Für die andere Grenze ist $a = b$. Die entsprechenden elliptischen Funktionen arten in einfachere Funktionen aus und es wird:

$$\overline{U}_{ab} = \left\{ \frac{\sqrt{K - 2\beta + 2a} + \sqrt{K}}{\sqrt{a}} \right\} \frac{\pi}{2\sqrt{3}},$$

während β und a durch die Gleichungen

$$K = 2\beta = 2(a^2 - \beta^2),$$

$$3a^2 = 3\beta^2 + 1$$

bestimmt werden. Für einen gegebenen Wert von K wissen wir hiermit, dass U_{ab} sich von dem Werte π zum Grenzwerte $\overline{U}_{ab}$ bewegt. Die Wertepaare K, β', welche auf der Asymptote $K = \beta'$ zur Curve $G(K, \beta') = 0$ liegen, entsprechen ebenfalls einem einfacheren Werte von U_{ab}.

§ 14.

Erläuterung einer Stelle bei Hermite.

In § XLIII seiner Arbeit stellt sich Hermite die Frage, ob es solche Lösungen giebt, die durch Vermehrung ihres Argumentes um eine Periode nur im Vorzeichen geändert werden. Der Vermehrung des Arguments um eine Periode entspricht aber das zweimalige Ueberschreiten des Intervalles, welches die Funktion

$$u = \rho \sin U \qquad \text{in} \qquad \bar{u} = \rho \sin(U + 2U_{ab})$$

und die Funktion

$$v = \rho \cos U \qquad \text{in} \qquad \bar{v} = \rho \cos(U + 2U_{ab})$$

überführt. Damit u und v durch diese Transformation ihre Vorzeichen wechseln muss U_{ab} gleich $\frac{\pi}{2}$ werden. Dies ist aber den letzten Paragraphen nach nur möglich für die untere Grenze des Intervalles III, d. h. für $L = 0$. Dieses entspricht aber dem einfachen Falle des gewöhnlichen Pendels. Um uns zu überzeugen, dass wir mit dieser Angabe nicht mit Hermite in Widerspruch kommen, wollen wir seine Bedingungen untersuchen. Wir bedienen uns hier seiner Bezeichnungen, von denen wir im allgemeinen abgingen, um die Weierstrass'schen elliptischen Funktionen zu gebrauchen.

Hermite findet den Wert von $u + iv$ und $u - iv$ als Produkt einer Funktion, welche durch die Substitution $t' = t + 2K$ (K ist die Periode der Funktionen $sn\ \omega$ etc.) ihr Vorzeichen ändert, mit einer Exponentialfunktion

$$e^{\left(\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right)t}.$$

Nun ist offenbar die Bedingung für die verlangte Eigenschaft die, dass

$$\lambda - \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)} = 0$$

ist. ω und λ sind Funktionen der drei Wurzeln der Gleichung $p't = 0$, d. h. Funktionen von $c = 3\beta$ und $L^2 = \frac{l^2}{2g}$, und ω kann in der Gestalt $K + i\delta$ gesetzt werden, wo δ reell ist.

Nun ist

$$\lambda = \frac{il}{\frac{\sqrt{g(\alpha-\gamma)}}{2}} = iL \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha-\gamma}},$$

wenn

$$(z + c)(z^2 - 1) + L^2 = (z - \alpha)(z - \beta)(z - y) = f(z, c)$$

und $\alpha > \beta > \gamma$ ist.

Hermite setzt

$$\omega = K + i\delta$$

und

$$i\pi(\delta) = \frac{iL}{\sqrt{\alpha-\gamma}} + \frac{\Theta'(K + i\delta)}{\Theta(K + i\delta)}$$

und beweist, dass $\pi(\delta)$ eine reelle stetige und beständig abnehmende Funktion von δ ist, welche einen Nullwert haben muss, wenn $\pi(\delta_1)$ und $\pi(\delta_2)$ für zwei Werte δ_1 und δ_2 entgegengesetzte Vorzeichen haben.

„Wir haben also", sagt Hermite, „die Existenz einer Wurzel der Gleichung $\pi(\delta) = 0$ bewiesen, sobald wir m so wählen können, dass

$$\frac{L}{\sqrt{\alpha-\gamma}} \quad \text{und} \quad \frac{L}{\sqrt{\alpha-\gamma}} - \frac{m\pi}{K}$$

entgegengesetztes Vorzeichen haben".

Dieser Beweis gilt jedoch nur dann, wenn δ, welches, wie eben bemerkt, eine Funktion von c und L ist, für den betreffenden Wert von L durch alle reellen Werte hindurchläuft. Es muss daher δ alle Werte von 0 bis $2K'$ annehmen können. Nun ist aber sehr leicht zu beweisen, dass δ nur dann die Grenzwerte 0 und K' annehmen kann, wenn $L = 0$ ist.

Hermite beweist nämlich:

$$sn^2\omega = -\frac{\alpha^2(\beta+\gamma)}{\alpha-\beta},$$

$$cn^2\omega = \frac{\beta^2(\alpha+\gamma)}{\alpha-\beta},$$

$$dn^2\omega = \frac{\gamma^2(\alpha+\beta)}{\alpha-\gamma},$$

$$k = \sqrt{\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\gamma}}.$$

Wenn nun $\omega = K$, d. h. $\delta = 0$ sein soll, müssen

$$\frac{\alpha^2(\beta+\gamma)}{\alpha-\beta} = 1, \tag{1}$$

$$\frac{\beta^2(\alpha+\gamma)}{\alpha-\beta} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\gamma^2(\alpha+\beta)}{\alpha-\gamma} = \frac{\beta-\gamma}{\alpha-\gamma} \tag{3}$$

sein. Aus Bedingung (2) folgt entweder $\beta = 0$ oder $\alpha = -\gamma$. $\alpha = -\gamma$ ist unmöglich, wenn L nicht gleich Null ist, da sonst α weniger als 1 und γ weniger als -1 ist. Setzen wir $\beta = 0$ in (1) ein, so kommt

$$\alpha^2\gamma = \alpha \qquad \text{oder} \qquad \begin{cases} \alpha\gamma = +1, \\ \alpha = 0. \end{cases} \tag{4}$$

$\beta = 0$ in (3) eingesetzt ergiebt $\qquad \alpha\gamma^2 = -\gamma,$

also muss entweder $\gamma = 0$ sein, welches unmöglich ist, oder $\alpha\gamma = -1$, welches der Bedingung (4) widerspricht. Ein ähnliches Verfahren zeigt, dass δ auch nicht gleich K' werden kann, ausser wenn L, d. h. wenn $l = 0$ ist. Wir können also sagen, dass die Bahncurve des sphärischen Pendels sich nur dann nach 2 Vollzügen schliessen kann, wenn $l = 0$ ist, d. h. nur dann, wenn das sphärische Pendel sich in ein gewöhnliches vereinfacht.

§ 15.

Der Fall des allgemeinen Kreisels. Betrachtung mittels der stereographischen Projection. — Uebergang zum Pendelfall.

Wir definieren einen Kreisel als einen um einen festen Punkt rotierenden Körper, dessen Trägheitsmomente um zwei Axen gleich sind und dessen Schwerpunkt auf der dritten Hauptträgheitsaxe liegt. Wir lassen alle drei Trägheitsmomente gleich 1 sein, nehmen also einen etwas specialisirten Fall an, auf den sich jedoch alle anderen Fälle mit grosser Leichtigkeit zurückführen lassen.

Es mögen u, v und w die Coordinaten der Kreiselspitze und der Abstand der Spitze von dem festen Punkte des Kreisels, den wir als den Coordinatenanfangspunkt wählen, gleich der Einheit sein. u und v sind dann durch die Gleichungen[1]):

$$\left.\begin{aligned} u + iv &= \sqrt{w^2-1}\cdot e^{i\int \frac{l-nw}{1-w^2}\cdot dt} \\ \text{und } w \text{ durch:} & \\ \left(\frac{dw}{dt}\right)^2 &= W = (\pm 2Pw - 2h)(w^2-1) - l^2 - n^2 + 2lnw \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

gegeben, wo P das Gewicht des Kreisels, h die lebendige Kraft, l die Flächengeschwindigkeit um die Verticale und n die Geschwindigkeit um die Kreiselaxe ist.

1) Ich habe diese Formeln den Vorlesungen von Prof. Klein entnommen. Sie sind in dieser oder einer ähnlichen Form in den meisten Lehrbüchern der Mechanik zu finden.

Nunmehr unterscheiden wir zwei Fälle:

a) Liegt der Schwerpunkt des Kreisels unterhalb des Unterstützungspunktes, so gebrauchen wir das obere Vorzeichen in der Gleichung für W. Wenden wir jetzt die Transformationen

$$\frac{l}{\sqrt{2p}} = L, \quad \frac{n}{\sqrt{2P}} = N, \quad \frac{h}{2P} = c = 3\beta,$$

$$t' = \sqrt{-\frac{P}{2}} \cdot t, \qquad w = x - \beta$$

an, so bekommen wir:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{W(x)} = \frac{dx}{dt'} &= 2\sqrt{(x+2\beta)((x-\beta)^2-1)+L^2+N^2-2LN(x-\beta)}, \\ y_1 = u + iv &= \sqrt{(x-\beta)^2-1}\, e^{\int \frac{2L-2N(x-\beta)}{(x-\beta)^2-1} \cdot \frac{dx}{\sqrt{w}}}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Von hier ab ersetzen wir der Einfachheit halber t' durch t. Die Funktion y_1 hat Nullstellen, wo

$$x = \beta + 1 = pt_1$$

und

$$x = \beta - 1 = pt_2$$

ist, oder wo

$$t = t_1$$

und

$$t = t_2$$

ist, wenn die Vorzeichen von t_1 und t_2 so gewählt werden müssen, dass

$$p't_1 = +2(L-N),$$

$$p't_2 = -2(L-N)$$

sind.

Nun ist y_1 bei $x = \infty$, $t = 0$ unendlich wie $\sqrt{x_2} = x$, y_1 hat somit bei $t = 0$ eine doppelte Unendlichkeitsstelle und hat also die allgemeine Gestalt einer Lösung der Lamé'schen Gleichung:

$$y_1 = Ke^{\lambda t} \cdot \frac{\sigma(t-t_1)\sigma(t-t_2)}{\sigma^2 \cdot t}$$

(wo λ eine bis jetzt unbekannte Grösse ist). Damit aber eine solche elliptische Funktion zweiter Art, zweiten Grades eine Lösung der Lamé'schen Gleichung sein kann, werden die n-Nullpunkte $t = t_1, = t_2, = t_3, \cdots, = t_n$ n-Bedingungen unterwor-

fen, in denen der eine variable Parameter B vorkommt. Für den Fall $n = 2$ werden diese Bedingungen

$$pt_1 + pt_2 = \tfrac{1}{2}B,$$

$$p't_1 + p't_2 = 0.$$

Die erste dieser Gleichungen können wir befriedigen, wenn wir $B = 6\beta$ setzen, wie für den Pendelfall.

Es ist aber nach den obigen Gleichungen

$$p't_1 + p't_2 = -4N$$

und wir gelangen infolgedessen zu dem Satze: $u + iv$ ist in der That eine elliptische Funktion zweiter Art zweiten Grades, genügt aber nur dann den weiteren Bedingungen für eine Lösung einer Lamé'schen Gleichung, wenn $N = 0$ ist, dass heisst nur in dem schon betrachteten Falle des sphärischen Pendels.

Prof. Klein zeigt [1]), dass wir einen einfacheren Ausdruck für diejenige Curve erhalten, die durch geeignete stereographische Projection der Bahncurve aus entsteht.

Denken wir uns eine um den Fixpunkt 0 des Kreisels gelegene im Raume feste Kugel, deren Punkte in üblicher Weise die Träger einer complexen Variabeln ζ sind. Es sei dann Z eine andere complexe Variable, welche auf einer anderen mit dem Kreisel sich bewegenden Kugel existiert. Insbesondere entspreche $Z = \infty$ der Kreiselspitze. Es zeigt sich nun, dass die Bewegung des Kreisels durch eine derartige Substitution

$$\zeta = \frac{\alpha Z + \beta}{\gamma Z + \delta}$$

darstellbar ist, in der α, β, γ und δ elliptische Funktionen zweiter Art ersten Grades sind. Setzen wir hier $Z = \infty$, so ergiebt

$$\zeta = \frac{\alpha(t)}{\gamma(t)}$$

die Lage der Kreiselspitze auf der Kugel zu einer gegebenen Zeit t. Wenn wir ζ als eine gewöhnliche complexe Variable auffassen wollen, erzeugt $\zeta = u + iv$ die vom obersten Kugelpunkte aus genommene stereographische Projection der Bahncurve auf die

---

1) „Ueber die Bewegung des Kreisels", Nachrichten der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1896.

Ebene $w = 0$. Führen wir hier die Werte von α und γ ein, und setzen $y = \frac{\alpha}{\gamma}$, so ist:

$$y = \sqrt{\frac{x-\beta+1}{x-\beta-1}} \cdot e^{\int \frac{2L-2N(x-\beta)}{(x-\beta)^2-1}\,dt}, \tag{3'}$$

$$y = \sqrt{\frac{pt-pt_2}{pt-pt_1}} \cdot e^{\frac{1}{2}\int \frac{p't_1}{pt-pt_1}\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{p't_2}{pt-pt_2}\cdot dt}, \tag{3}$$

$$y = \frac{\sigma(t-t_2)}{\sigma(t+t_1)} \cdot \frac{\sigma t_1}{\sigma t_2} \cdot e^{t(\zeta t_1 + \zeta t_2)}. \tag{3''}$$

Nun setzen wir

$$t + t_1 = t'',$$

$$t_1 + t_2 = t_0.$$

Hierauf wird

$$y = K \frac{\sigma(t''-t_0)}{\sigma t'' \cdot \sigma t_0} e^{(t''+t_1)(\zeta t_0 - \frac{1}{2}\left(\frac{p't_1-p't_2}{pt_1-pt_2}\right)}$$

oder wegen

$$\tfrac{1}{2}\frac{p't_1-p't_2}{pt_1-pt_2} = L,$$

$$y = K_1 \frac{\sigma(t''-t_0)}{\sigma t'' \cdot \sigma t_0} \cdot e^{t''(\zeta t_0 - L)}.$$

Es wird also im allgemeinen Kreiselfall die der stereographischen Projection der Bahn der Kreiselspitze entsprechende Funktion y multipliziert mit einem Faktor eine Lösung der Lamé'schen Gleichung $n = 1$ sein.

Wir haben zu setzen:

$$pt_0 = B,$$

also

$$p(t_1 + t_2) = B.$$

Nun ist

$$p(t_1+t_2) = \tfrac{1}{4}\left(\frac{p't_1-p't_2}{pt_1-pt_2}\right) - pt_1 - pt_2$$

$$= N^2 - 2\beta.$$

Setzen wir $\beta = -B'$, so ist die Ebene x, B' durch eine kleine Verschiebung und eine Vergrösserung aus der Ebene x, B für den

Kreisel zu bekommen. Diese neue Grundebene x, B' für den Kreisel, den wir (K) nennen wollen, wird nur die Curven $F = 0$ und $S = 0$ enthalten, da die anderen Curven $\psi = 0$ und $\chi = 0$ nur für die hyperbolischen Intervalle ein Interesse haben.

Wir unterscheiden acht Fälle, je nachdem

1) der Schwerpunkt unterhalb oder oberhalb des Unterstützungspunktes liegt,

2) $LN > 0$ oder $LN < 0$,

3) $|L| > |N|$ oder $|N| > |L|$.

Wir werden aber nur vier verschiedene Figuren brauchen, weil wir die beiden letzten Fälle 3) zusammen darstellen können (in einer Figur). $W = 0$ bleibt nämlich ungeändert, wenn wir L und N darin umtauschen, dient also für zwei Fälle und die beiden Geraden $F = 0$ und $C = 0$, welche $|N| < |L|$ entsprechen, sind mit Blau gezeichnet, für $|N| > |L|$ rot gezeichnet.

a) Für unseren jetzigen Fall, wo der Schwerpunkt unterhalb des Unterstützungspunktes ist, haben wir

$$\tfrac{1}{4} W = (x - 2B')((x + B')^2 - 1) + L^2 + N^2 - 2LN(x + B').$$

$$x - 2B' = 0,$$

$$x + B' + 1 = 0 \quad \text{und} \quad x + B' - 1 = 0$$

sind Asymptoten der Curve für alle Werte von L und N. Sie haben alle einfache Berührung im Unendlichen. Die vierte Gerade

$$x + B' = \frac{L^2 + N^2}{2LN}$$

schiebt sich mit wechselndem L und N auf und ab und bestimmt den anderen Durchschnitt der Curve mit $x + 2B' = 0$. Wenn $LN > 0$ ist, liegt diese Gerade auf der rechten Seite der Figur (Fig. (29)), andernfalls auf der linken (Fig. (30)).

Um die Schnittpunkte der Curve

$$F(x) = x - B = x - 2B' - N^2$$

mit $W(x) = 0$ zu finden, setzen wir

$$x - 2B' = N^2$$

in diese Gleichungen ein, und bekommen

$$N^2((x + B')^2 - 1) + L^2 + N^2 - 2LN(x + B') = 0,$$

$$(N(x + B') - L)^2 = 0.$$

$x - 2B' = N^2$ berührt also die Curve $W = 0$, wo sie die Linie $x + B' = \frac{L}{N}$ trifft. Wenn $|L| < |N|$ ist, liegt diese zwischen den Geraden $x - \beta = 1$, und $x - \beta = -1$. Wenn $|L| > |N|$ ist, so findet die Berührung ausserhalb dieser Linien statt, und zwar zur rechten oder zur linken derselben, je nachdem LN positiv oder negativ ist.

Für diesen Fall ($n = 1$) giebt es im allgemeinen drei ausgezeichnete Werte von B, welche bewirken, dass $C = 0$ ist, da

$$C = 2\sqrt{(B-a)(B-b)(B-c)} = p't_0$$

ist, wenn

$$pt_0 = B = +2B' + L^2$$

gesetzt wird. Für unseren Fall ist

$$C = \sqrt{(N(N^2 + 3B') - L)^2}$$

Einer der ausgezeichneten Werte von B ist in's Unendliche hinausgerückt und die anderen zwei sind zusammengefallen.

Die Bewegung des Kreisels entspricht offenbar dem schmalen Zweige zwischen den Geraden $x - \beta = 1$, und $x - \beta = -1$ (Figuren (29) und (30)). Um zu finden, welchem Bereich der Ebene (A) (Fig. (1)) dieser Bereich entspricht, betrachten wir die einzelnen Figuren.

$$LN > 0 \qquad \text{(Fig. (29)}$$

$$\alpha)\ |L| < |N|.$$

Die Reihenfolge der Nullpunkte $F = 0$ der hyperbolischen Lösungen für unseren Zweig ist überall wie in Fig. (α). Dieselbe ist die nämliche wie im Streifen III der Ebene A; $C = 0$ entspricht der Grenzlinie $B = B_2$ dieses Streifens und die auf beiden Seiten dieser Grenze liegenden Teile unseres Feldes müssen demselben Teile von III, $\widehat{ab}$ entsprechen. Da die Linie $F = 0$ mit der Asymptote des Zweiges 2 parallel ist, so schneidet sie ihn im Unendlichen, d. h. die Nullstelle $F = 0$ fällt im Unend-

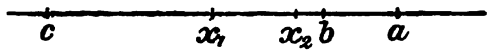


Fig. (α).

lichen mit den Punkt $x = c$ zusammen. Die untere Grenze des Intervalles III findet in der Ebene K ihren entsprechenden Wert von β. Für die in Figur (29) construirte Grundcurve wo $LN > 0$ und $|L| < |N|$ ist, entspricht unser Feld in (K) dem Bereiche III, $\widehat{ab}$ der allgemeinen Ebene A,

und zwar bewegt sich wenn B' von $-\infty$ wächst, B von B_3 bis für $C = 0$ $B = B_3$ wird. Hiernach kehrt B wieder um und geht zu einem gewissen Wert $B = B_\alpha$, der im Intervalle liegt, zurück. B_α hängt von L und N ab.

$$\beta)\ |L| > |N|.$$

Die Reihenfolge der Punkte $F = 0$, $x = a$, $x = b$, $x = c$ ist dieselbe, wie vorhin. Die ausgezeichnete Gerade $C' = 0$ tritt nicht in unseren Bereich ein. Wenn B' jetzt von $-\infty$ an beständig wächst, so bewegt sich B in der Ebene (A) von $B = B_3$ in der Richtung nach B_3 hin, bis es einen Wert B_α erreicht, der ebenfalls von L und N abhängt. Für $L = N$ fallen $F = 0$ und $F' = 0$ so wie auch $C = 0$ und $C' = 0$ zusammen, die Curve $W = 0$ artet in eine Gerade und eine Hyperbel aus, die in demselben Punkte mit $C = 0$ und $F = 0$ zusammentreffen. Das betrachtete Feld in (K) und das Feld III, $\widehat{ab}$ in (A) decken sich genau.

$$LN < 0, \qquad \text{(Figur 30).}$$

$$\gamma)\ |L| < |N|.$$

Hier wie im Falle (α) ist der Teil des Bereiches zwischen $C = 0$ und $B' = -\infty$ dem ganzen Felde III, $\widehat{ab}$ äquivalent und auf beiden Seiten von $C = 0$ liegen wieder zwei kleine Stücke, welche demselben Teile von III entsprechen.

$$\delta)\ |L| > |N|.$$

Hier ist die obere Grenze $B = B_3$ nirgends zu finden, da $C' = 0$ und $B' = -\infty$ beide der unteren Grenze des Bereiches III entsprechen. Es werden also einige in II vorkommende Figuren dreimal in 1 vorkommen.

b) Liegt der Schwerpunkt oberhalb des Unterstützungspunktes, so ist:

$$\frac{dw}{dt} = 2\sqrt{(w-c)(w^2-1) - L^2 - N^2 + LNw}\cdot\sqrt{\frac{P}{2}}$$

wir müssen hier:

$$w = x + \beta, \qquad (c = 3\beta)$$

$$t' = \sqrt{\frac{P}{2}}\cdot t$$

setzen, damit

$$x = pt'$$

ist. Durch dasselbe Verfahren wie das vorher angewandte erhalten wir:

$$y = \frac{\alpha}{\gamma} = K^{-iLt''} \frac{\sigma(t''-t_1)}{(\sigma t'')} \cdot e^{it''\zeta t_0}.$$

$e^{iLt''} \cdot y$ ist eine Lösung unserer Gleichung für $n = 1$ und $B = pt_0 = -L + 2\beta$, wobei $x - B = 0$ die Curve $S = 0$ in ihrem Schnittpunkte mit $x + \beta = \frac{N}{L}$ berührt. Wir haben jetzt drei Curven:

$$\tfrac{1}{4} W = (x - 2\beta)((x+\beta)^2 - 1) - (L^2 + N^2 - 2LN(x+\beta)) = 0,$$

$$F = x + L^2 - 2\beta \equiv x - B,$$

$$C = Kp't_0 = K_1 \{L(-L^2 + 3\beta) + N\} i = 0,$$

welche sich alle in demselben Punkte treffen.

Die Figuren (31) und (32) zeigen diese Grundfiguren für positives bezw. negatives LN; in beiden Fällen liegt der Nullpunkt von $F(x)$ zwischen a und b, wie Fig. (β) darstellt, und unser Feld liegt zwischen c und b. Das gesuchte Feld in der Ebene (A) ist also II, $\widehat{bc}$. Wir könnten, wie in dem vorigen Falle, den Teil dieses Feldes finden, in welchem sich die Curven für die gezeichneten typischen Formen der Grundebene (K) befinden. Um auf diese Frage eine erschöpfende Antwort geben zu können, müssten wir für beide Fälle eine noch grössere Anzahl von Ungleichungen

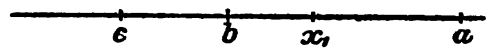


Fig. (β).

zwischen L und N und eine entsprechend grössere Anzahl von typischen Formen der Grundebene untersuchen (so ist z. B. noch eine solche Ungleichung nötig, um zu unterscheiden, ob die Gerade $C' = 0$ in Fig. (31) oberhalb der Geraden $C = 0$ liegt, wie wir es gezeichnet haben, oder unterhalb derselben), doch wäre das für unseren jetzigen Zweck zu umständlich. Wir begnügen uns also damit, einige Beispiele der Methode für den Fall, dass der Schwerpunkt unterhalb des Unterstützungspunktes liegt, gegeben zu haben. Dasselbe Verfahren dient auch für den Fall, dass der Schwerpunkt oberhalb des Unterstützungspunktes liegt.

Ersetzen wir nun L und t'' durch

$$\frac{l}{\sqrt{2P}} \quad \text{und} \quad \frac{t\sqrt{P}}{\sqrt{2}}$$

so können wir das Resultat unserer Kreiseluntersuchungen folgendermassen in Worte fassen:

Wenn wir die Coordinaten u und v der stereographischen Projection der Kreiselspitze als reellen und imaginären Teil einer Variabelen $y = u(t) + iv(t)$ auffassen, so ist dieses y multipliziert mit einem Faktor von der Gestalt $e^{\frac{lt}{2}i}$ eine elliptische Lösung einer Lamé'schen Gleichung $n = 1$, und zwar liegt diese Lösung in dem Bereiche III, $\widehat{ab}$ oder II, $\widehat{bc}$ der Ebene x, B, je nachdem sich der Schwerpunkt des Kreisels unterhalb oder oberhalb des Unterstützungspunkts befindet.

Denken wir uns nun die Bahn der Kreiselspitze wieder auf der Einheitskugel und achten wir ferner darauf, dass die Amplituden $\varphi_{ab} = 2U_{ab}$ einer in III existierenden elliptischen Lösung, sowie die Amplitude $\varphi_{cd} = 2U_{cd}$ einer elliptischen Lösung in II zwischen den Grenzen 0 und π liegen muss, so können wir sagen:

Der Winkel um die Verticale, welcher von der Kreiselspitze zwischen zwei aufeinander folgenden Berührungen mit einer ihrer Grenzkreise beschrieben ist, besteht aus zwei Teilen, von denen der eine gleich $\frac{l\omega_3}{i}$ oder $l\omega_1$ ist, d. h. gleich der Hälfte des Produktes der Flächengeschwindigkeit mit der benutzten Zeit, während der andere zwischen 0 und π liegt.

In unseren Ausgangsformeln für den Kreisel haben wir seine drei Haupt-Trägheitsmomente gleich 1 gesetzt. Trotzdem können wir den Fall des sphärischen Pendels als speciellen Fall des eben betrachteten ansehen, da n in den Formeln, die wir für unsere Behandlung vereinfacht haben, immer mit C zusammen eintritt. Wir können also für den Uebergang $C = 0$ setzen, worauf wegen

$$N = \frac{C \cdot n}{\sqrt{2P}}$$

auch $N = 0$ wird. Die Gerade

$$x + B' = \frac{L^2 + N^2}{2LN}$$

in den Figuren (29) und (30) rückt mit kleiner werdendem N in's Unendliche hinaus, die Linie $F = 0$ nähert sich der Geraden

$x - 2B' = 0$ und fällt in der Grenze mit ihr zusammen, wie ein Blick auf die Gleichung $F(x) = x - 2B' - N^2 = 0$ zeigt. Die Gerade $C' = 0$ wird ebenfalls in's Unendliche hinausgerückt, und es ist daher kein ausgezeichneter Fall vorhanden. Die Ebene hat also genau dieselbe Form wie bei der früheren Behandlung des sphärischen Pendels. Ein Unterschied besteht nur noch darin, dass früher die beiden einander parallelen Asymptoten die Curve der Nullstellen $F(x) = 0$ bildeten, und diese jetzt durch die 3. Asymptote dargestellt wird. Die Bahncurve des sphärischen Pendels auf der Kugel hat die Eigenschaft, dass ihre orthogonale Projection $w = 0$ sich durch eine Funktion darstellen lässt, die eine Lösung der Lamé'schen Gleichung für $n = 2$ ist. Ihre stereographische Projection auf diese Ebene ist dagegen bis auf einen Faktor $e^{\frac{it}{2}}$ durch eine Lösung der Lamé'schen Gleichung für $n = 1$ bestimmt.

Es sei P ein Punkt auf der Bahn (Fig. γ), N seine orthogonale, M seine stereographische Projection. Ferner mögen $u_1 + iv_1$

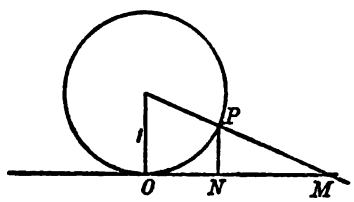


Fig. (γ).

die Lage von N und $u_2 + iv_2$ diejenige von M darstellen. Dann ist aus den Gleichungen (1') pag. 44 und (3) pag. 56

$$\overline{ON}^2 = u_1^2 + v_1^2 = (x-\beta)^2 - 1,$$

$$\overline{OM}^2 = u_2^2 + v_2^2 = \frac{x-\beta+1}{x-\beta-1}$$

Aus der Figur überzeugt man sich leicht, dass die Relation

$$\left(\frac{ON}{OM}\right)^2 = \frac{(x-\beta-1)}{1}$$

in der That stattfindet. Ferner zeigt der Vergleich derselben Gleichungen, dass der Winkel U (wenn wir wie früher die Polarcoordinaten dieser Curven mit ρ und U bezeichnen) für beide Curven derselbe ist. Setzen wir nämlich in ξ die Werte

von g_2 und g_3 aus der Pendelgleichung ein, so finden wir $\xi = L$.

Es liegt jetzt nahe, zu fragen, ob diese Umformung der Curve auf die Transformation von Halphen, durch welche die elliptische Funktion zweiter Art, zweiten Grades einem Produkt einer solchen ersten Grades und einer rationalen Funktion von pt gleichgesetzt wird, zurückzuführen ist. Das wird indessen schwerlich der Fall sein können, obgleich der zweite Faktor mit dem von Halphen der Form nach identisch ist, da wir eine Transformation auf die unabhängige Variable angewandt haben.

Vita.

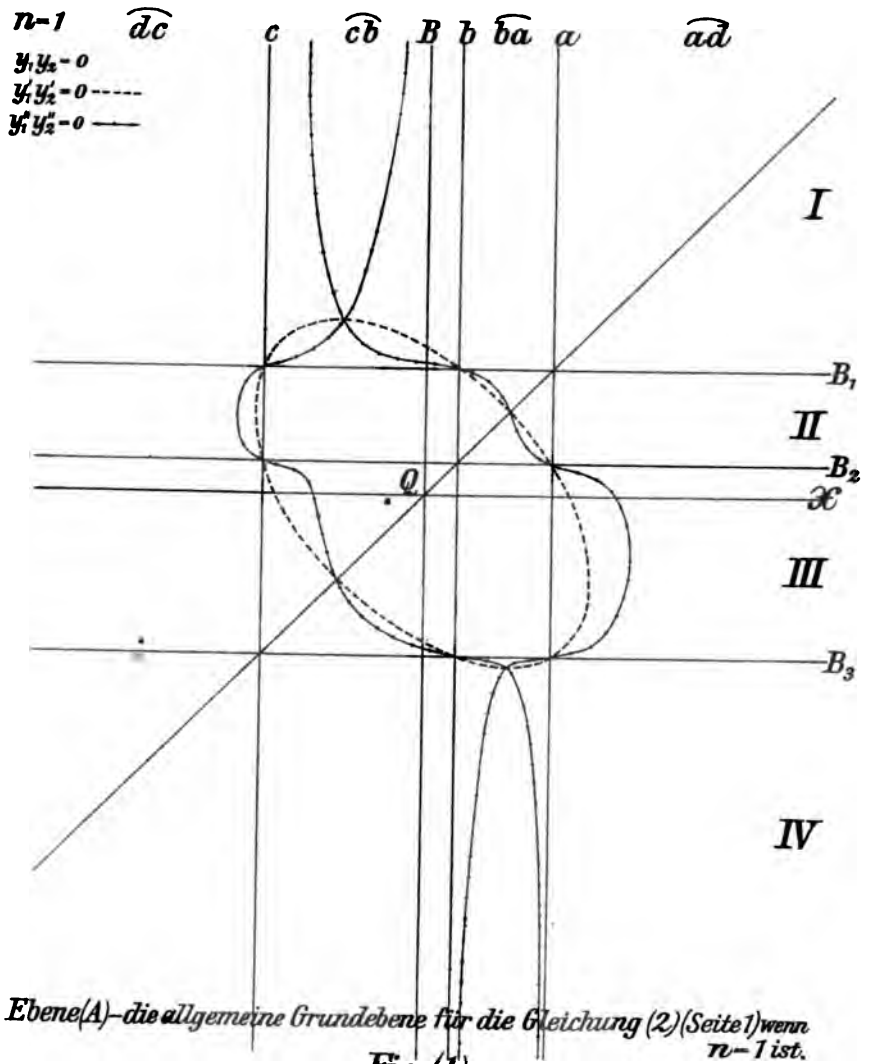
Ich, Mary Frances Winston, wurde am 7. August 1869, als Tochter des Arztes Dr. Thomas Winston und seiner Ehefrau Carolyn geborene Mumford, in Forreston im Staate Illinois in den Vereinigten Staaten geboren. Ich bin Protestant.

Im Herbst 1884 bezog ich die University of Wisconsin, wo ich im Juni 1889 mit dem Grade des B. A. promovirte. Darauf nahm ich eine Stellung als Lehrerin der Mathematik im Downer College, Fox Lake Wisconsin, an. Zwei Jahre später erhielt ich ein Fellowship in Mathematics in Bryn Mawr College, wo ich ein Jahr studirte. Im Jahre 1892 bezog ich die University of Chicago, wo ich ebenfalls ein honorary Fellowship in Mathematics bekommen hatte.

Im September 1893 reiste ich nach Göttingen und habe an der dortigen Universität nach Zulassung als Hospitantin durch den Herrn Minister meine Studien in der Mathematik, Physik und Astronomie fortgesetzt.

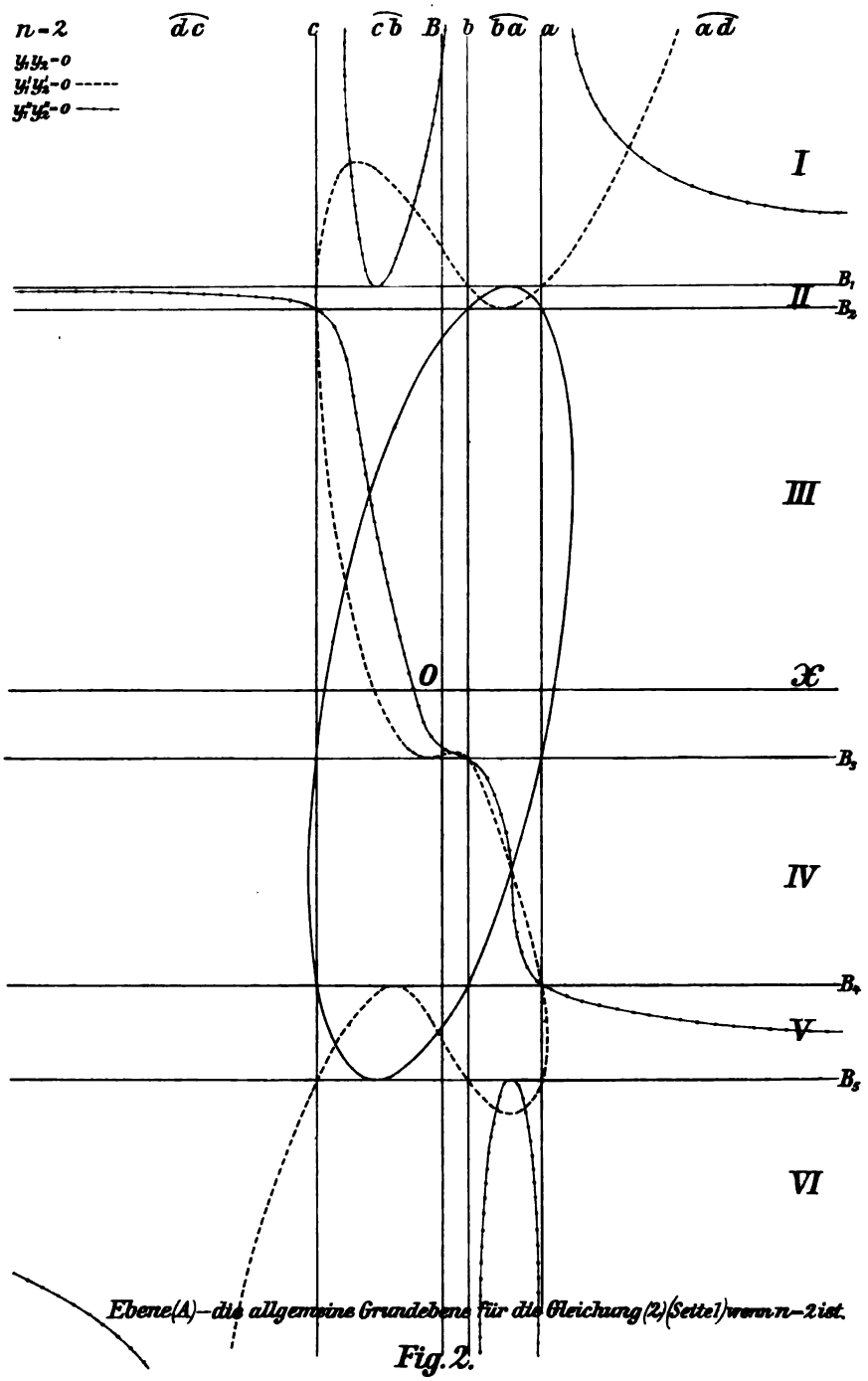
Meine hauptsächlichen Lehrer waren: in Wisconsin, Prof. C. A. Van Velzer; in Bryn Mawr College, Prof. Charlotte A. Scott und Prof. Harkum; und in Chicago die Professoren Moore, Bolza und Maschke. In Göttingen habe ich bei den Herrn Professoren Burkhardt, Hilbert, Klein, Schönfliess, Schur, Voigt, Weber und bei Herrn Dr. Bohlmann Vorlesungen gehört und bin die ganze Zeit Mitglied des mathematisch-physikalischen Seminars gewesen.

Ich benutze diese Gelegenheit um sämmtlichen vorgenannten Herren, namentlich Prof. Scott und Prof. Voigt und vor allem meinem verehrten Lehrer Herrn Prof. Klein, für die Unterstützung, die sie mir bei meinen Studien gewährt haben, meinen besonderen Dank auszusprechen.



Ebene(A)–die allgemeine Grundebene für die Gleichung (2)(Seite 1) wenn $n-1$ ist.

Fig. (1).



Ebene(A)–die allgemeine Grundebene für die Gleichung (2) (Seite 1) wenn n–2 ist.

Fig. 2.

$n-1$
$B-B_1-a$

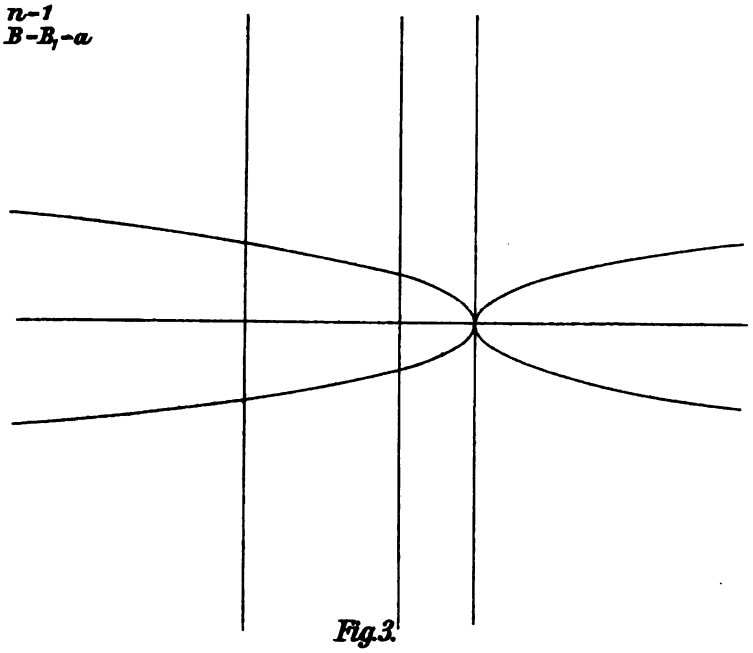


Fig.3.

$n-2$
$\beta-\beta_1=+\sqrt{\frac{a}{l_1}}$

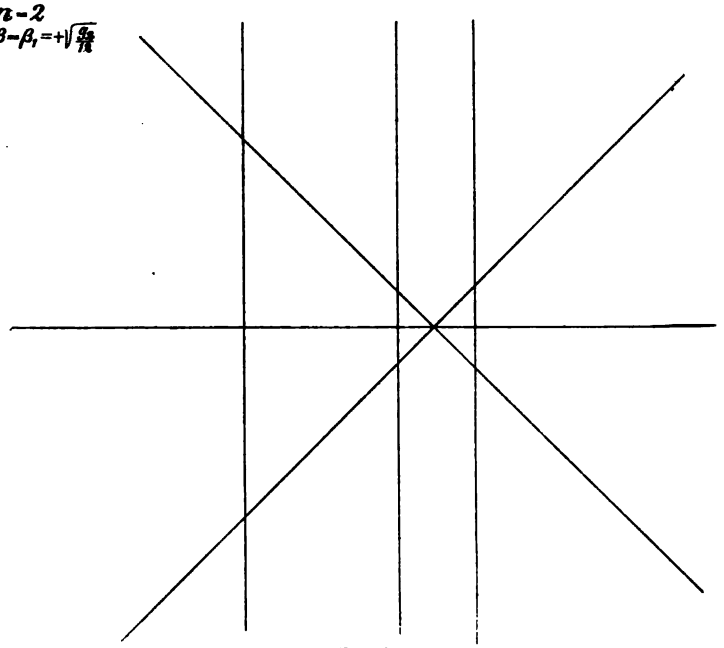


Fig.4.

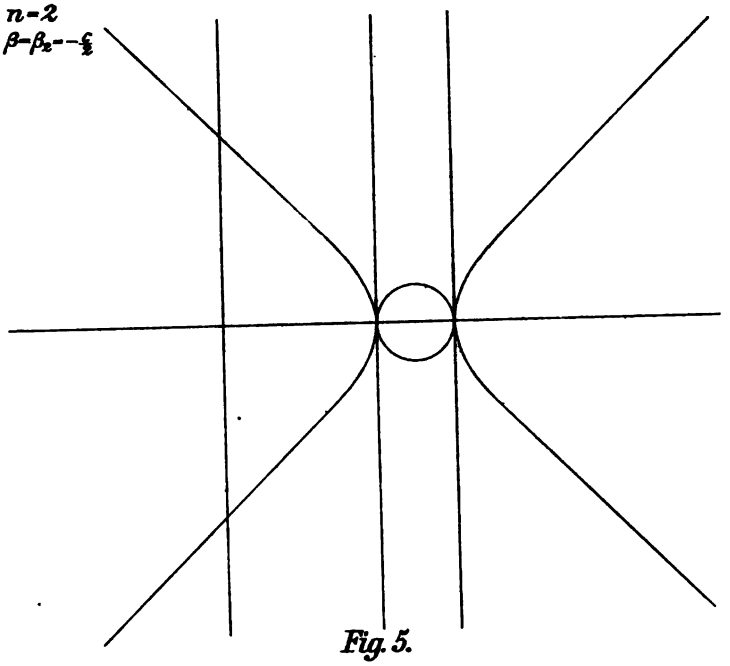


Fig. 5.

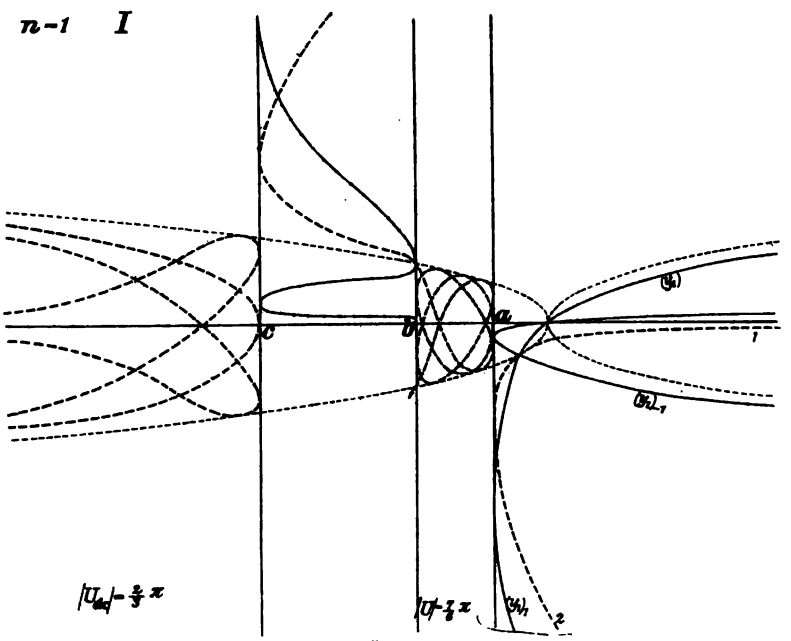


Fig. 6.

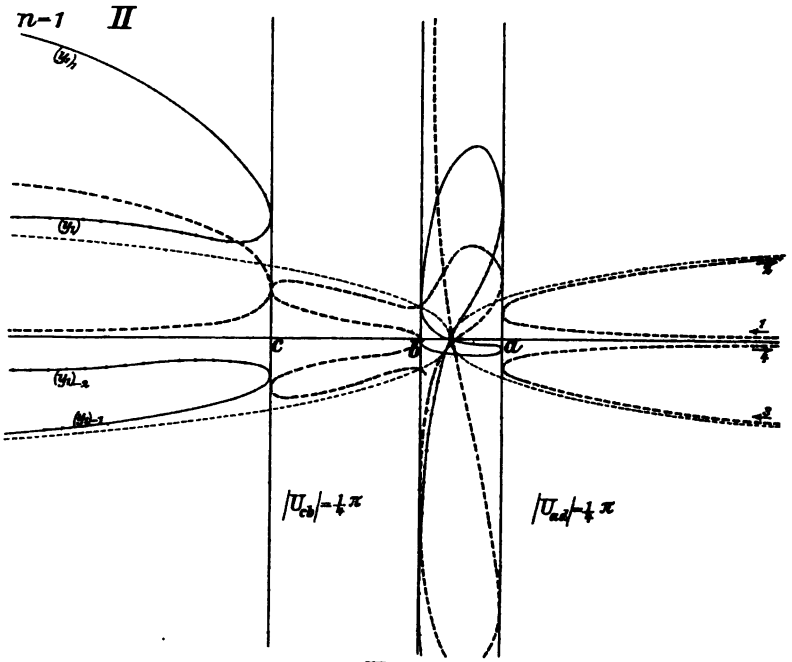
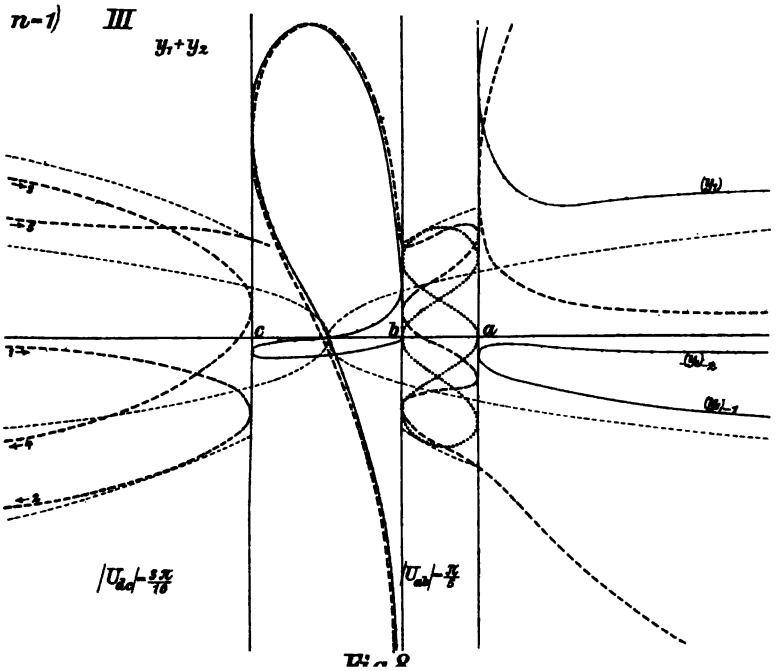


Fig. 7.



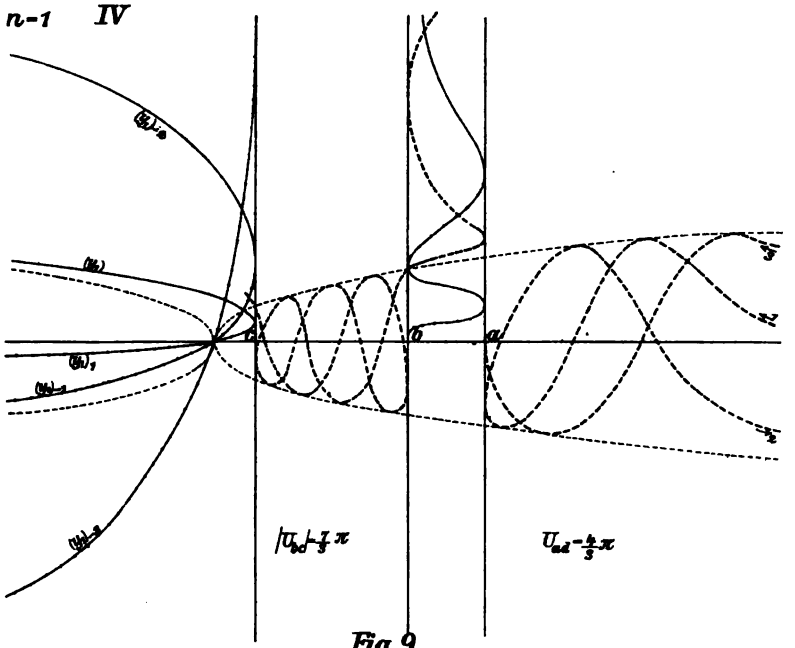


Fig. 9.

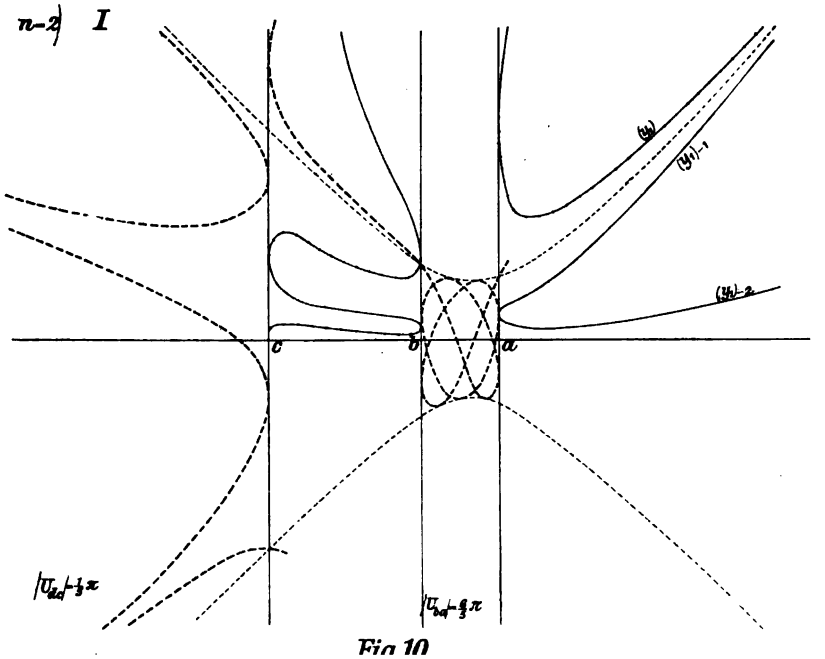


Fig. 10

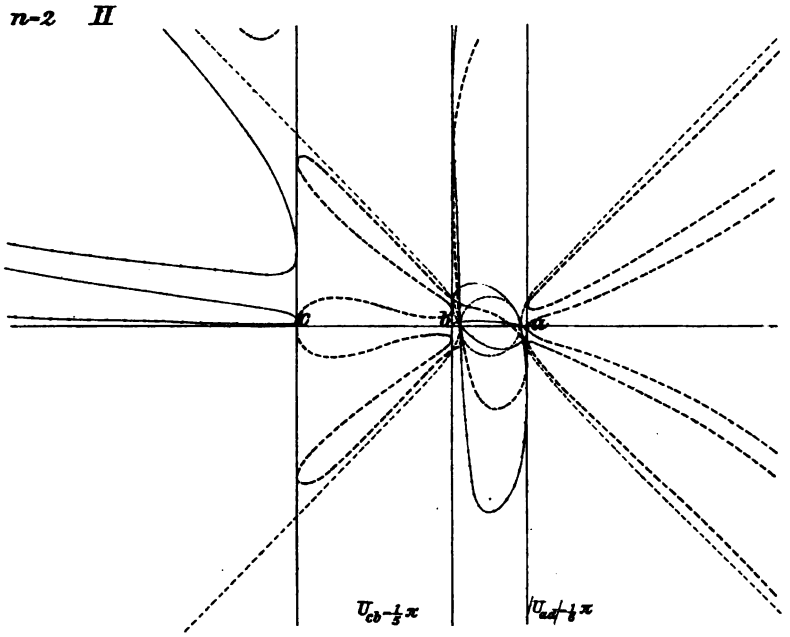

n-2 II
b
n
a
$U_{cb}=\frac{1}{3}\pi$
$U_{ad}=\frac{1}{3}\pi$

Fig.(11).

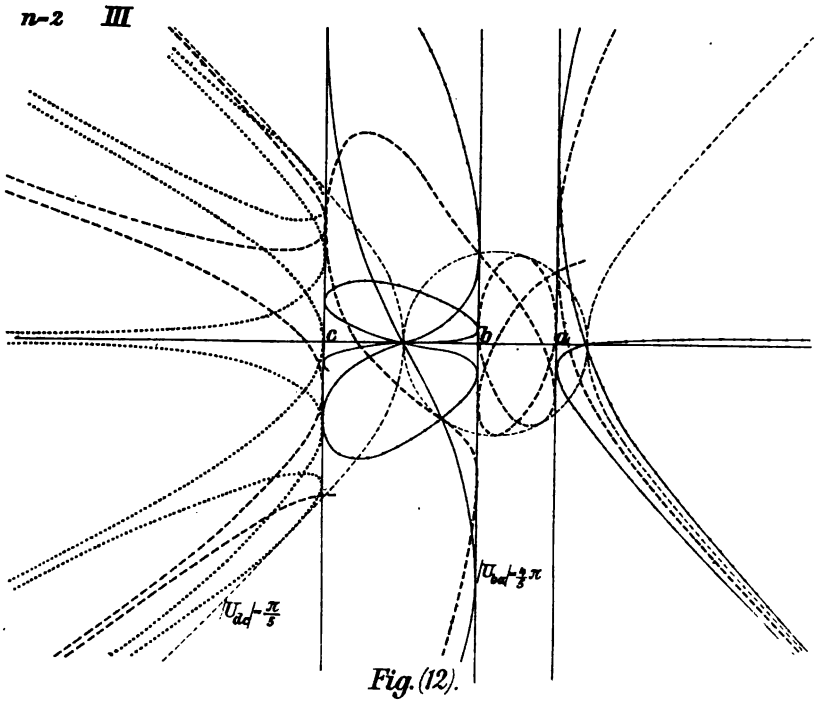

n-2 III
c
b
a
$U_{ad}=\frac{2}{3}\pi$
$U_{ad}=\frac{\pi}{3}$

Fig.(12).

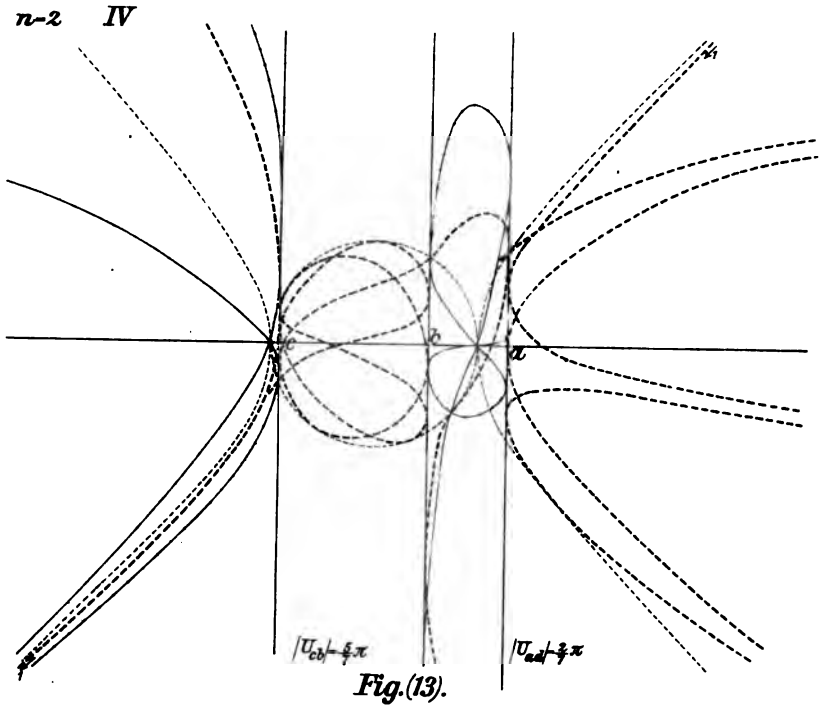
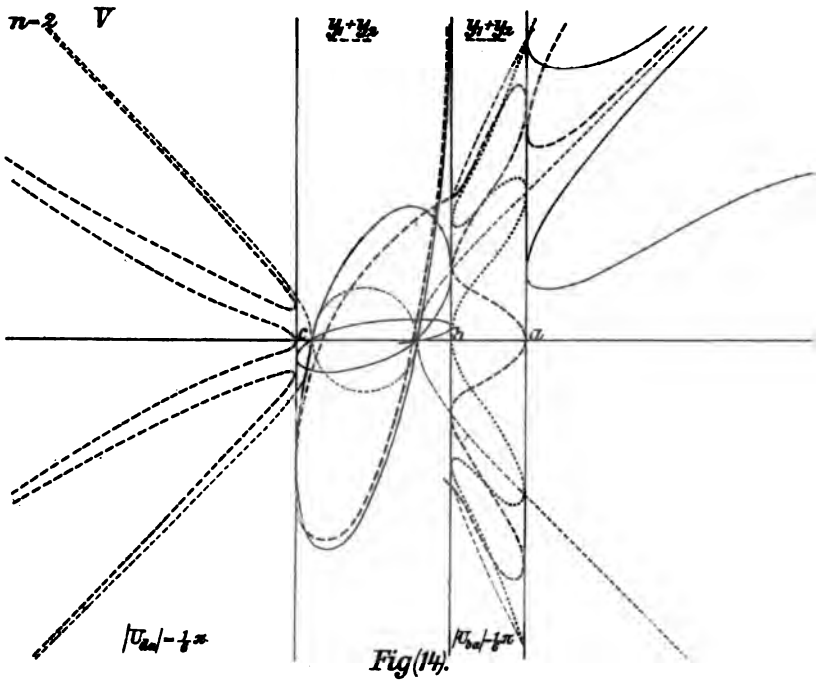

n-2 IV
c
b
a
$|U_{cb}| = \frac{5}{7}\pi$
$|U_{ad}| = \frac{3}{7}\pi$

Fig.(13).


n-2 V
y_1+y_2
y_1+y_2
c
b
a
$|U_{da}| = \frac{1}{6}\pi$
$|U_{ba}| = \frac{1}{6}\pi$

Fig(14).

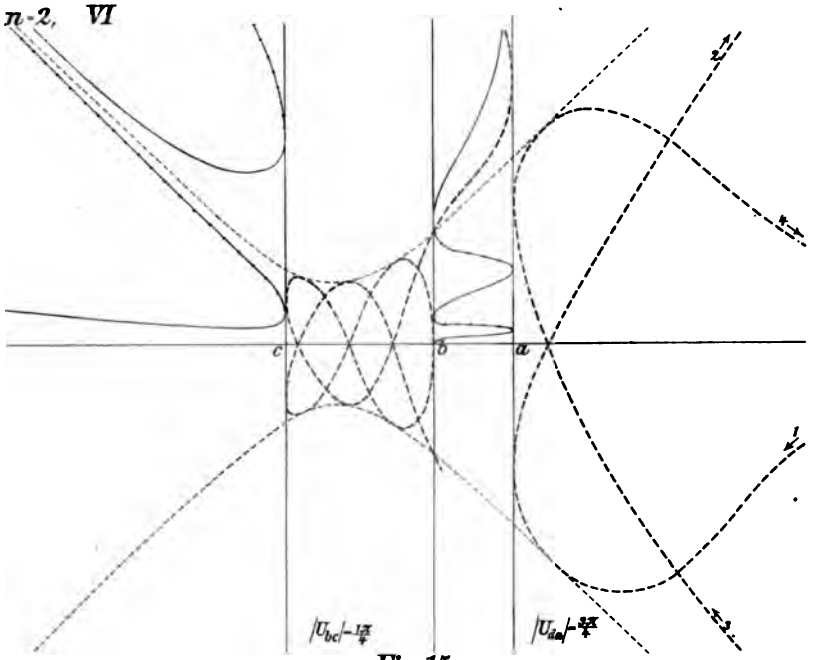

n-2, VI
c
b
a
$|U_{bc}|=\frac{1\pi}{4}$
$|U_{da}|=\frac{3\pi}{4}$

Fig.15.

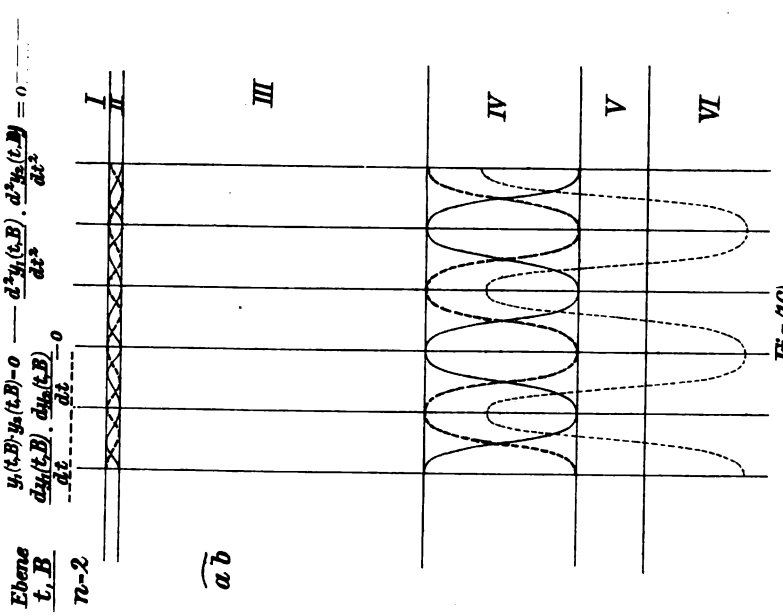

Ebene
t, B
n-2
$y_1(t,B)\cdot y_2(t,B)=0$
$\frac{dy_1(t,B)}{dt}\cdot\frac{dy_2(t,B)}{dt}=0$
$\frac{d^2y_1(t,B)}{dt^2}\cdot\frac{d^2y_2(t,B)}{dt^2}=0$
I
II
III
IV
V
VI
$\widehat{ab}$

Fig.(16).

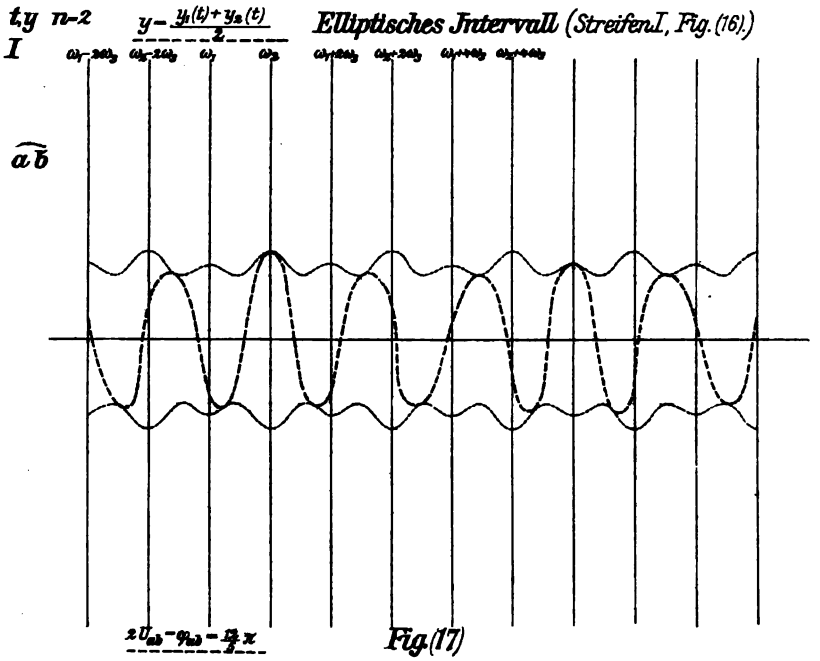

t,y n-2
I
$y-\frac{y_1(t)+y_2(t)}{2}$
Elliptisches Intervall (Streifen I, Fig. (16).)
$\omega_1-2\omega_3$
$\omega_2-2\omega_3$
ω_1
ω_2
$\omega_1+2\omega_3$
$\omega_2+2\omega_3$
$\omega_1+\omega_3$
$\omega_2+\omega_3$
a b
$2U_{ab}-\varphi_{ab}-\frac{\pi}{2}x$

Fig. (17)

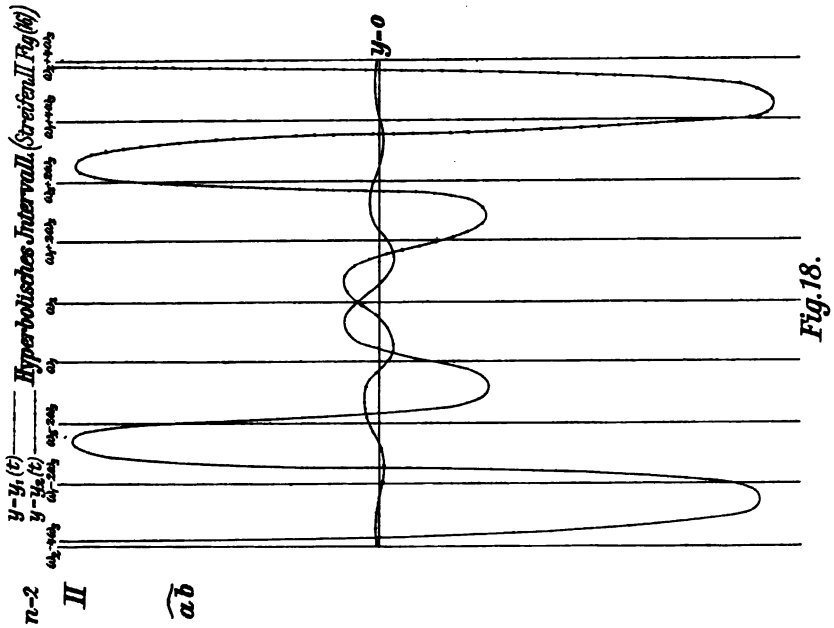

n-2
II
a b
$y-y_1(t)$
$y-y_2(t)$
Hyperbolisches Intervall (Streifen II Fig (16))
y-o

Fig. 18.

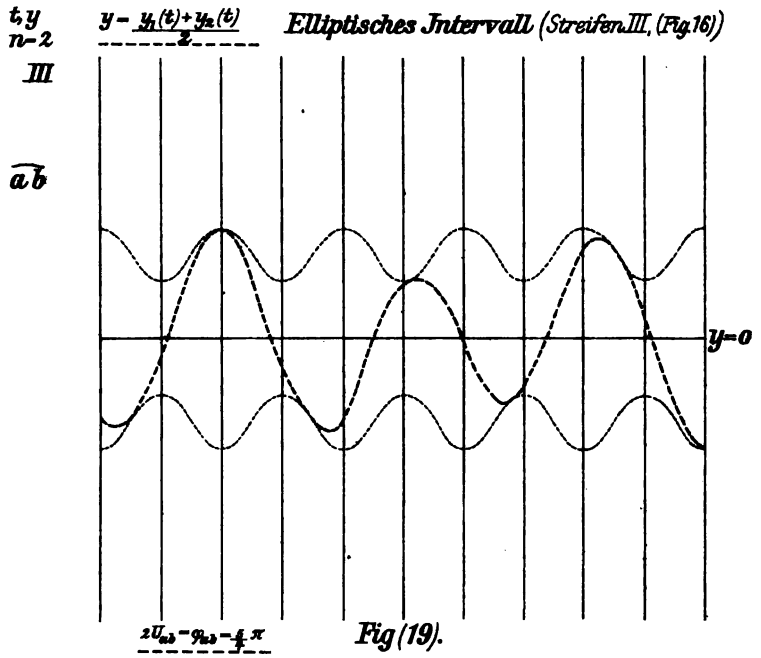

t, y
n-2
III
a b
y - y₁(t)+y₂(t) / 2
Elliptisches Intervall (Streifen III, (Fig. 16))
y=0
2U_ab - φ_ab - 4/4 π

Fig (19).

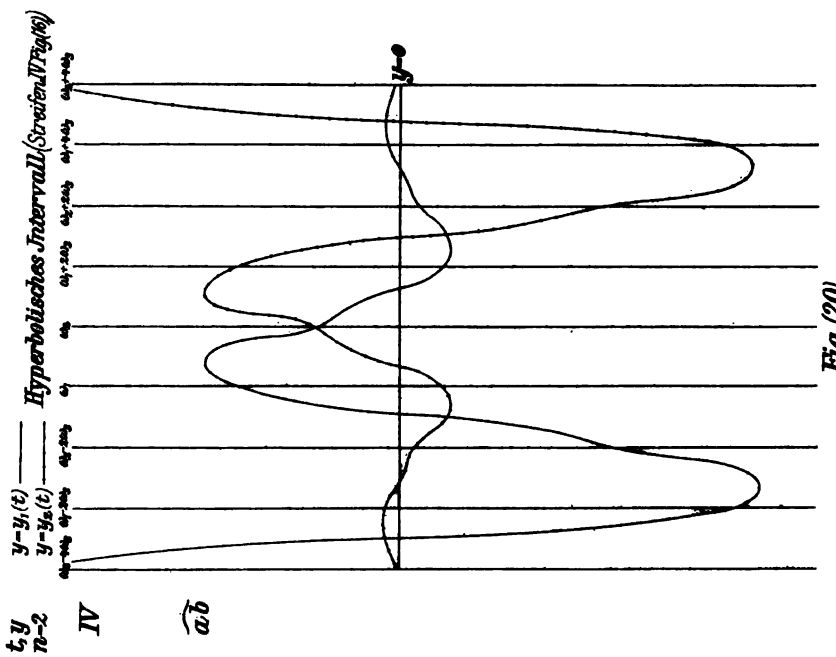

t, y
n-2
IV
a b
y-y₁(t) ——— y-y₂(t) ——— Hyperbolisches Intervall (Streifen IV (Fig. 16))
y=0

Fig. (20).

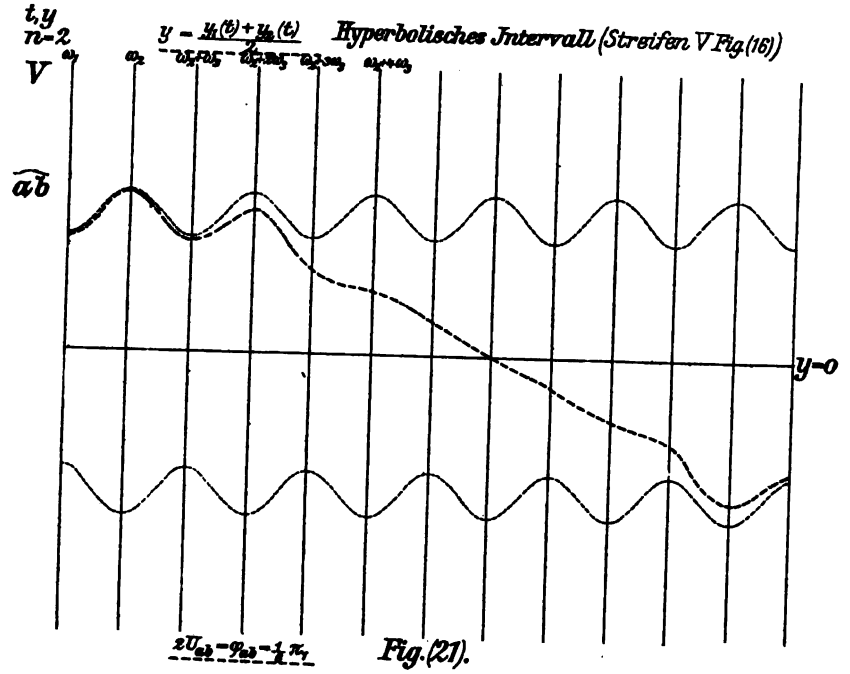
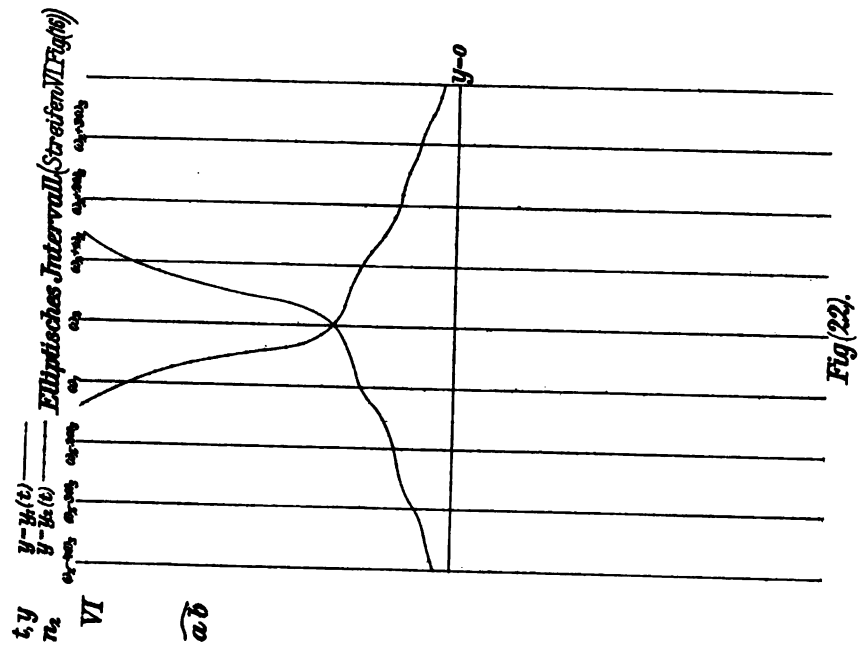

t,y
n-2
V
ab
y = y₁(t) + y₂(t)
Hyperbolisches Intervall (Streifen V Fig.(16))
y-o

Fig.(21).


t,y
n₂
VI
ab
y-y₁(t) —— y-y₂(t) —— Elliptisches Intervall (Streifen VI Fig(16))
y-o

Fig(22).

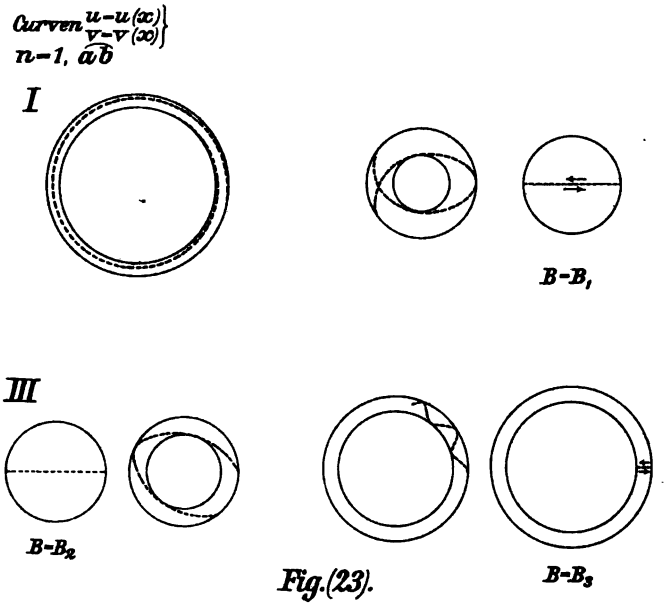

Curven $\begin{matrix} u-u(x) \\ v-v(x) \end{matrix}$
n-1, $\widehat{ab}$
I
B-B,
III
B-B2
B-B3

Fig.(23).

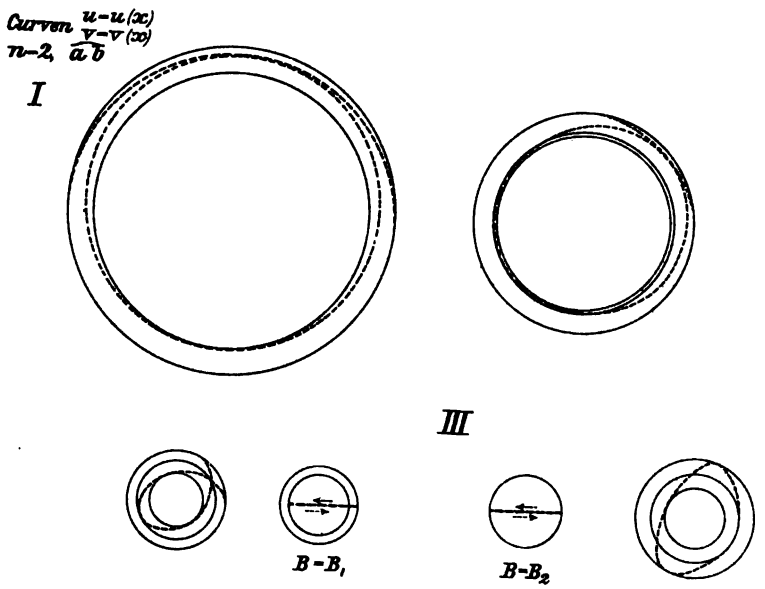

Curven $\begin{matrix} u-u(x) \\ v-v(x) \end{matrix}$
n-2, $\widehat{ab}$
I
III
B-B,
B-B2

Fig.(24).

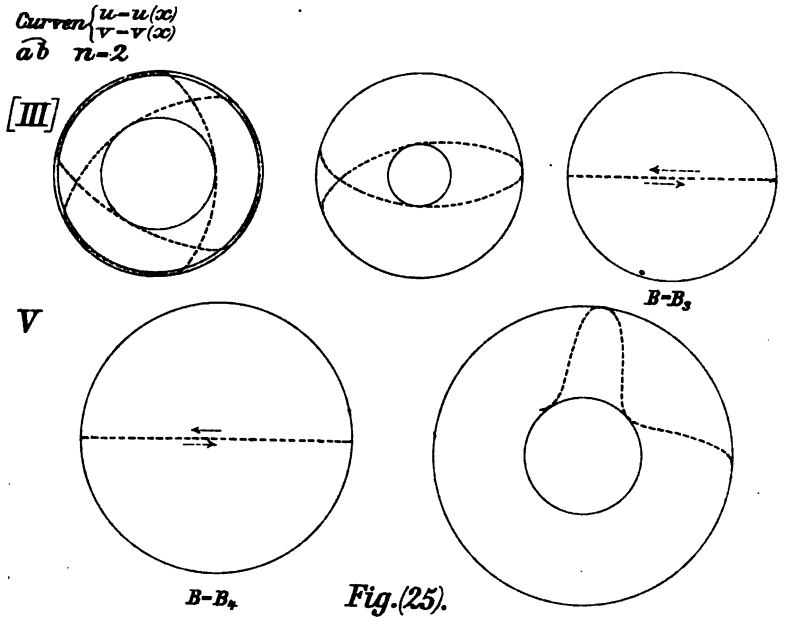

Curven $\begin{cases} u-u(x) \\ v-v(x) \end{cases}$
$\widehat{ab}$ n-2
[III]
V
B-B₃
B-B₄

Fig.(25).

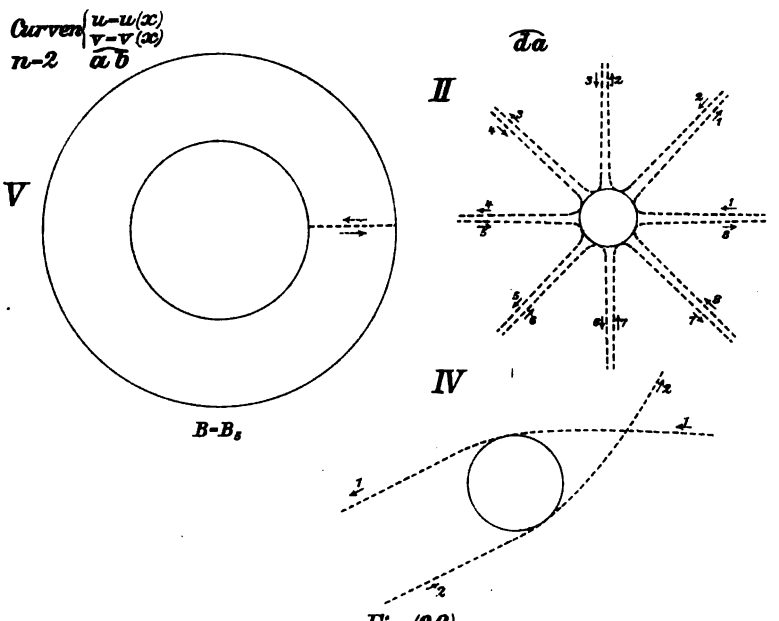

Curven $\begin{cases} u-u(x) \\ v-v(x) \end{cases}$
n-2 $\widehat{ab}$
V
B-B₂
$\widehat{da}$
II
IV

Fig.(26).

Ebene (P) *Grundebene für die Gleichung des sphärischen Pendels.*

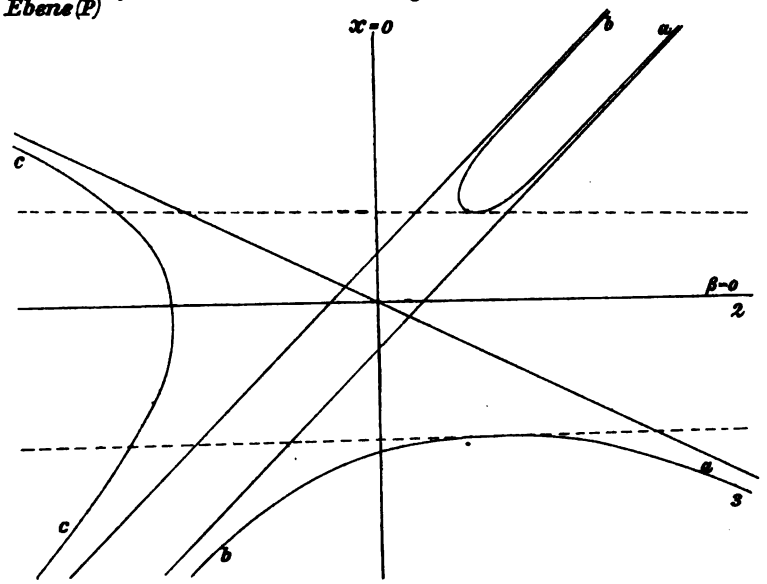


Fig.(27).

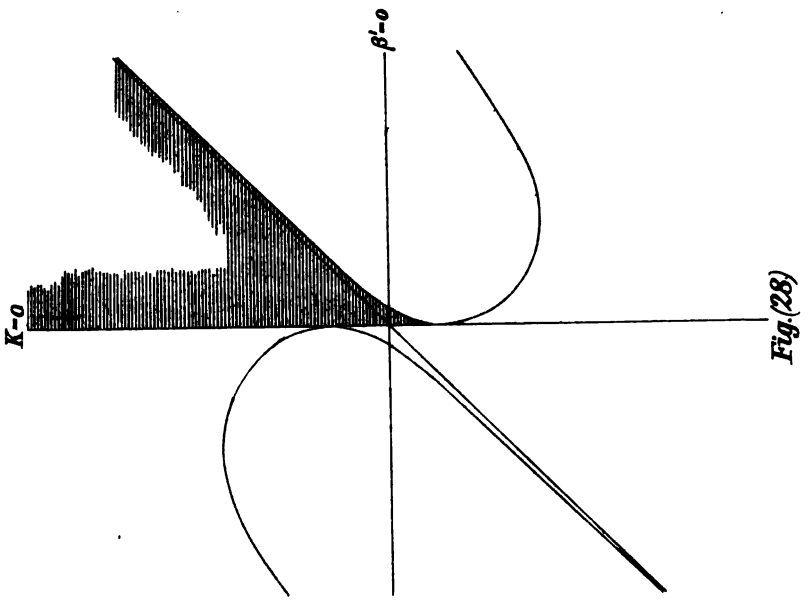
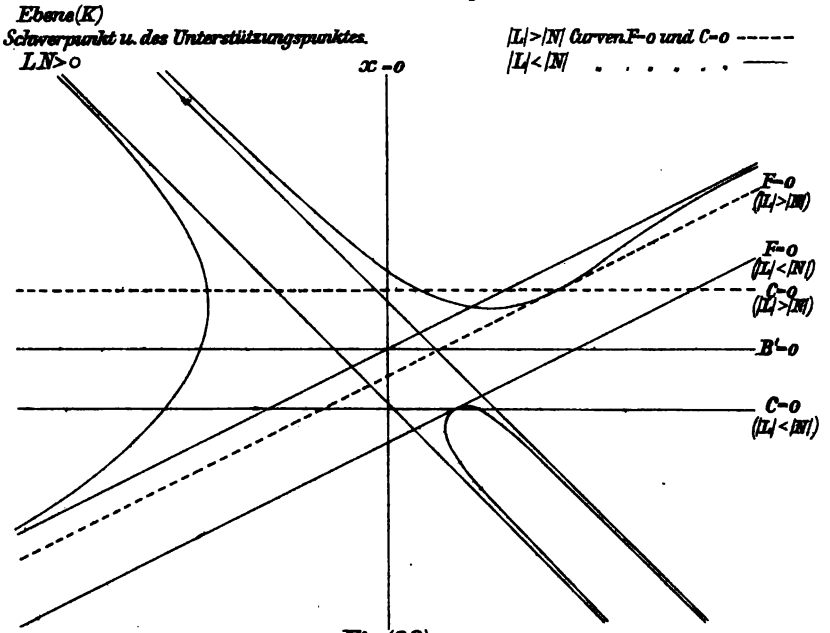


Fig.(28)

Grundebene für die Gleichung des Kreisels



Fig(29).

Grundebene für die Gleichung des Kreisels.

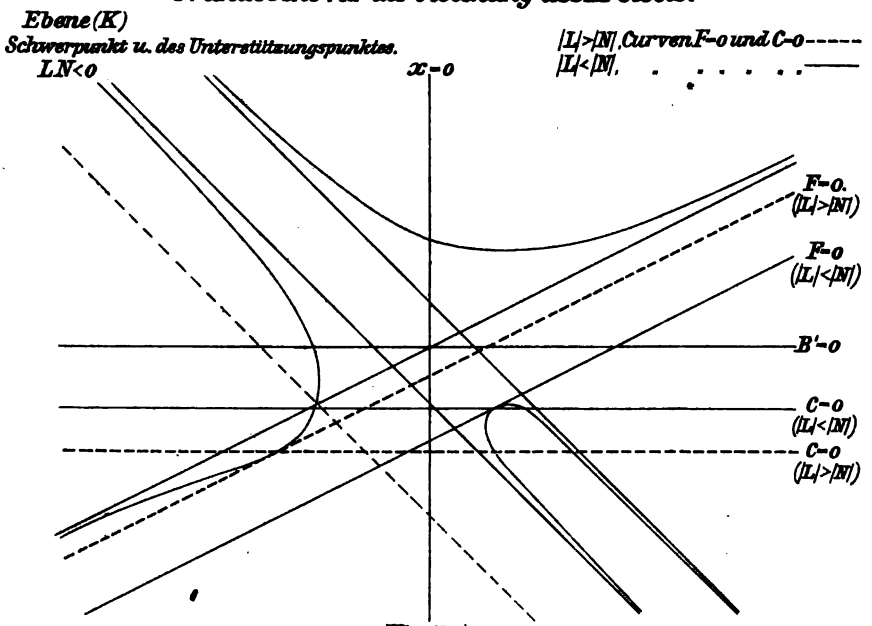


Fig.(30).

Grundebene für die Gleichung des Kreisels.

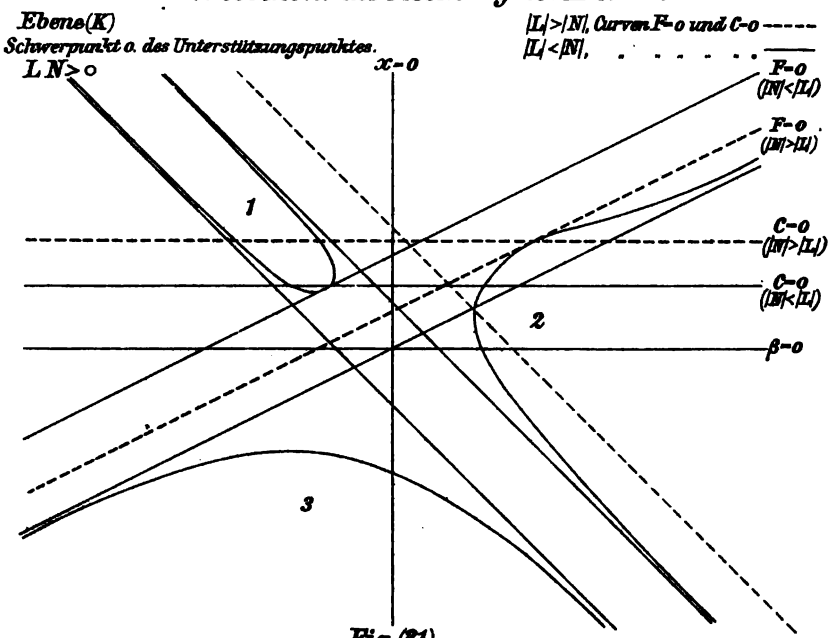


Fig. (31).

Grundebene für die Gleichung des Kreisels.

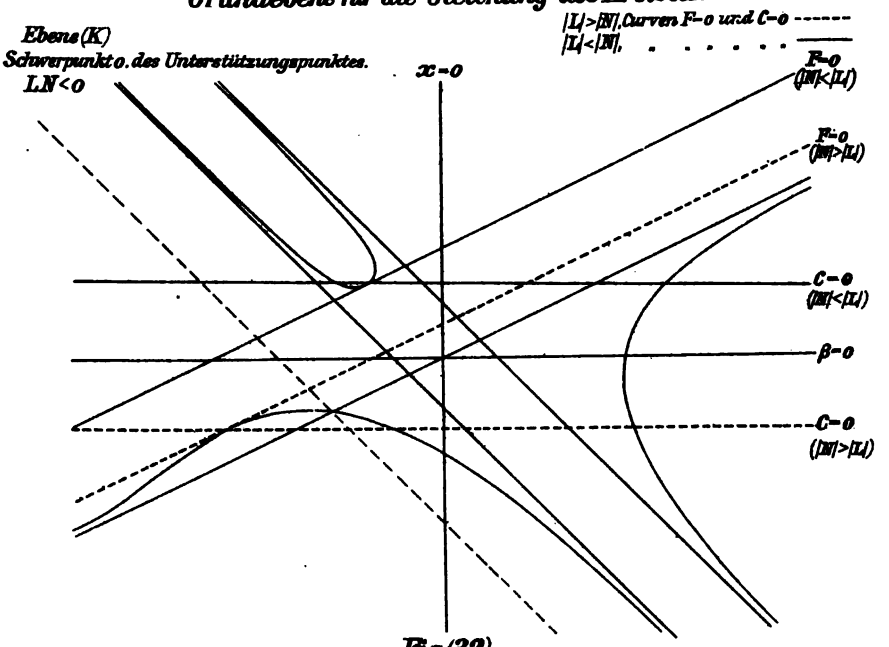
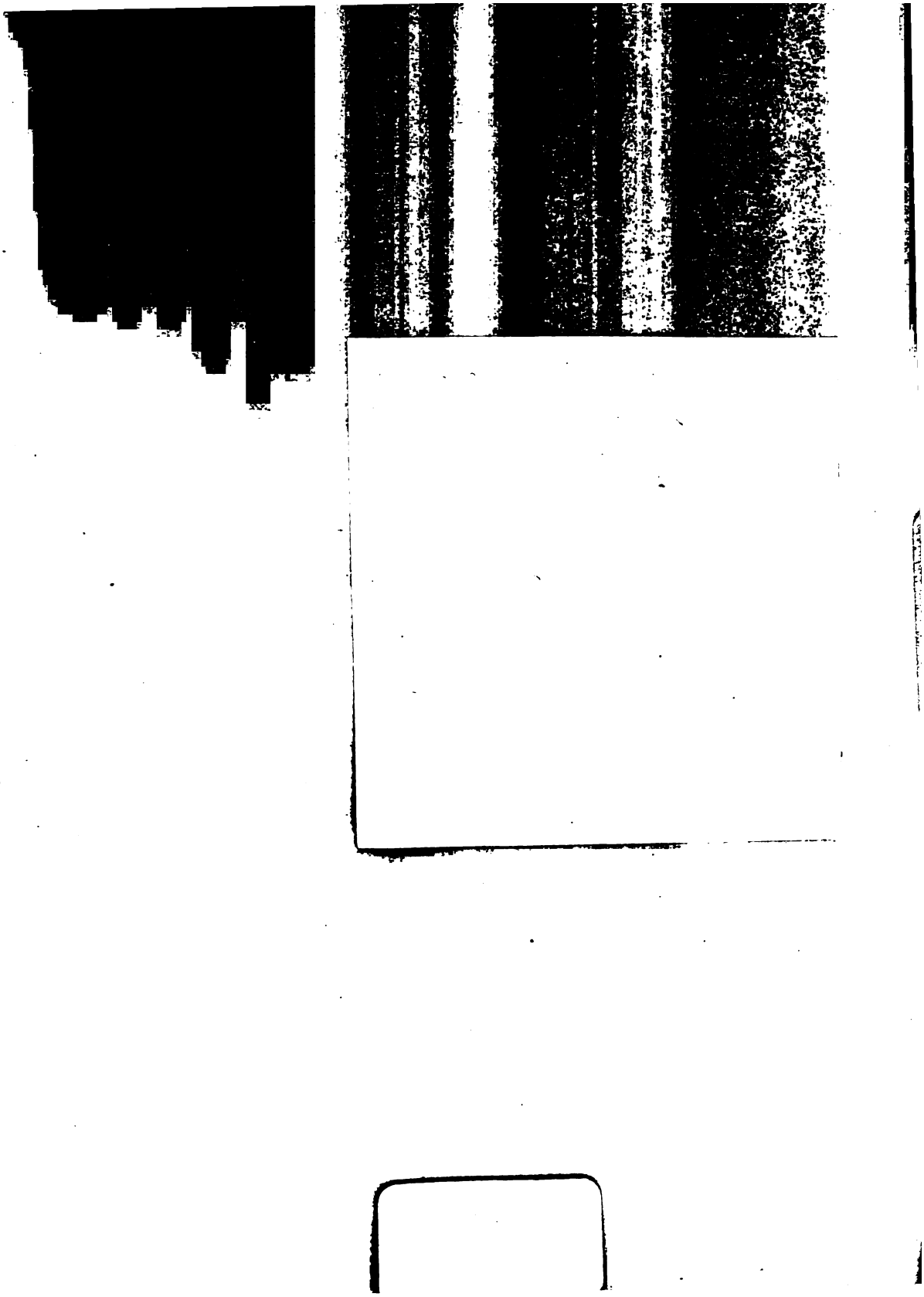



Fig. (32).